Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 12

Considere a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; ; \; z > 0\}$$

e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (-y, x, xz + y)$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo F através de S segundo a normal unitária cuja terceira componente é negativa, usando

a) Teorema da divergência.

b) Teorema de Stokes

Solução:

a) Para usar o teorema da divergência, consideremos o domínio regular D definido por

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \; ; \; z > 0\}$$

A fronteira de D contém as superfícies S e B, sendo B definida por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \; ; \; x^2 + y^2 < 1\}$$

Então, aplicando o teorema da divergência ao campo vectorial $rotF$ e ao domínio D, obtemos

$$\begin{aligned} \int\int\int_D div(rotF) &= \int\int_{\partial D} rotF \cdot \nu \\ &= \int\int_S rotF \cdot \nu_S + \int\int_B rotF \cdot \nu_B \end{aligned}$$

em que ν_S é a normal unitária e exterior em S e ν_B é a normal unitária e exterior em B. Dado que B é uma superfície horizontal, temos

$$\nu_B = (0, 0, -1)$$

Por outro lado, $div(rotF) = 0$ e, portanto,

$$\int\int_S rotF \cdot \nu_S = -\int\int_B rotF \cdot \nu_B$$

e, tendo em conta que, em B,

$$rotF = (1, -z, 2) = (1, 0, 2)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int\int_S rotF \cdot \nu_S &= -\int\int_B (1, 0, 2) \cdot (0, 0, -1) \\ &= 2vol_2(B) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Dado que a normal ν_S é exterior a D em S, tem terceira componente positiva e, portanto, o fluxo pretendido é o simétrico do que foi calculado através do teorema da divergência, ou seja, -2π.

b) Para usar o teorema de Stokes, notemos que a superfície S é orientável por ser o gráfico da função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e a respectiva fronteira é a linha

$$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \; ; \; x^2 + y^2 = 1\}$$

Dado que a normal unitária ν a considerar tem terceira componente negativa, a fronteira ∂S deve ser descrita no sentido negativo, ou seja deve ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0) \; ; \quad 0 < t < 2\pi$$

Do teorema de Stokes, obtemos,

$$\begin{aligned}
\int\int_S rotF \cdot \nu &= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0) dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

tal como na alínea anterior.