Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 11

Considere a superfície, com densidade de massa $\alpha(x,y,z) = 1/\sqrt{1+4(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2}$, definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2, 1 < x^2+y^2 < 4\}.$$

Calcule o momento de inércia de S em relação ao eixo dos x.

Solução: S é uma superfície de revolução, com eixo de revolução ao longo do eixo dos z. Para parametrizarmos S, podemos usar coordenadas ρ e θ com $\rho \in]1,2[$ e $\theta \in]0,2\pi[$ e a parametrização será $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1+(\rho-2)^2)$.

Temos

$$Dg(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \\ 2(\rho-2) & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$V(D_\rho g, D_\theta g) = ||D_\rho g \times D_\theta g|| = (\det(Dg^t Dg))^{1/2} = \rho\sqrt{1+4(\rho-2)^2}.$$

A distância de um ponto (x,y,z) ao eixo dos x é dada por $d_x(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$.

O momento de inércia de S relativamente ao eixo dos x é então obtido atavés de

$$I_x(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \alpha(g(\rho,\theta))\, d_x^2(g(\rho,\theta))\, \rho\sqrt{1+4(\rho-2)^2} d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho(\rho^2\sin(\theta)^2 + (1+(\rho-2)^2)^2) d\rho d\theta = (15/4 + 31/5 + 182/3 - 65)\pi.$$