Análise Matemática III
1º Semestre de 2001/2002

Exercício-Teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 3/12/2001)

Carlos Quente Gaudêncio tinha problemas. Certa manhã acordou com a ideia fixa de se tornar super-herói. Sentou-se à beira da cama esfregando os olhos compulsivamente, levantou-se e vestiu um pijama de tecido turco azul bébé; caída sobre as costas colocou uma toalha de mesa vermelha, atando-a com um nó ao pescoço. Em poucos segundos encontrou e calçou as galochas de borracha encarnada que tinha comprado para o último Inverno chuvoso. Respirou fundo. Dirigiu-se à janela do quarto, que ficava no segundo andar da "Vivenda Gaudêncio", equilibrou-se instavelmente no parapeito, gritou com toda a força dos seus pulmões:

- É um pássaro! É um avião! Não!

Atirou-se e continuou gritando com toda a voz:

- É o Super-Gaudêncioooooooooooooooooooooooooooooooooooooo!

Poucos instantes depois encontrava-se estatelado no chão, aturdido e gemendo:

- Ai! Ai! Aiiiiiiiiii!

De imediato a menina Lucialima ouvindo o enorme estrondo correu em auxílio do irmão. O Sr. Gaudêncio que se encontrava fechado no seu escritório a recordar a sua fase Beatle e a ouvir o "Clube de Corações Solitários do Sargento Pimenta" saltou da poltrona e foi também acudir.

- Quentinho! Quentinho, estás bem ? - perguntaram em coro o Sr. Gaudêncio e a menina Lucialima.

- Simmmmmmmmm - respondeu Carlos Quente.

- Ai é ? Então diz-nos lá em que ponto da superfície da tua cabeça é que te dói mais para que lá te coloquemos um cubo de gelo ? - perguntaram pai e filha.

Poucos momentos antes de desmaiar de vez, Carlos Quente levantou ligeiramente a cabeça e sussurrou a resposta ao ouvido do pai.

Sabendo que a superfície da cabeça de Carlos Quente é elipsoidal da forma

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

que a função dor de cabeça é obviamente dada pelo campo escalar

$$f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 2z,$$

e que Carlos Quente é também um cromo em AMIII e resolveu o problema acertadamente, diga qual foi a resposta que ele deu ao pai.

Solução:

Temos o problema de encontrar o ponto onde a função $f(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 2z$ restrita à superfície elipsoidal S de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ atinge o valor máximo.

Como S é compacta e f é contínua então de certeza que existirá um valor máximo (e também um valor mínimo) para f em S.

Seja $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1$. Temos que F é de classe C^1 e $\nabla F(x, y, z) = (x/2, y/2, 2z)$ só se anula na origem $(0, 0, 0)$ que não pertence a S. Logo, S é uma variedade-2.

Podemos portanto aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver o problema. Temos então que se (x, y, z) é um ponto de estacionaridade de

f restrita a S então existe um real λ tal que o sistema de equações seguinte tem solução:

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla F(x,y,z) \\ F(x,y,z) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} = \lambda \frac{x}{2} \\ \frac{1}{2} = \lambda \frac{y}{2} \\ -2 = 2z\lambda \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

As 3 primeiras equaçẽs implicam que $\lambda \neq 0$ e $x = y = -z = 1/\lambda$. Substituindo na última equação obtemos $\lambda^2 = 3/2$ ou seja temos duas soluções do sistema, respectivamente p_1 e p_2:

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda = \sqrt{3/2} \\ p_1 = (x,y,z) = (\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda = -\sqrt{3/2} \\ p_2 = (x,y,z) = (-\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, +\sqrt{2/3}) \end{array} \right.$$

Os valores de f nestes pontos são respectivamente $f(p_1) = 3\sqrt{2/3}$ e $f(p_1) = -3\sqrt{2/3}$. Logo, p_1 é o ponto de máximo e p_2 o ponto de mínimo. Concluímos que a dor de cabeça de Carlos Quente era maior algures na base do seu crânio.