Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 11: (a entregar na semana de 2/12/2002)

Um fabricante de bolas de rugby produz bolas elipsoidais cuja superfície se pode descrever pelo conjunto

$$E_{(a,c)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\},$$

onde $a, c > 0$ são parâmetros que podem ser escolhidos pelo fabricante.

a) A massa das bolas concentra-se praticamente só na sua superfície e, por essa razão, pode ser descrita por uma densidade efectiva de massa por unidade de área definida em $E_{(a,c)}$ por

$$\sigma(x, y, z) = c \left(\frac{c^2}{a^2}(x^2 + y^2) + \frac{a^2}{c^2} z^2 \right)^{-1/2} .$$

Calcule a massa das bolas.

b) Restrições no processo de fabrico obrigam a que os parâmetros a, c estejam relacionados pela equação $a^2 + 2c^2 = 1$. Determine para que valores de a e c se obtêm as bolas mais pesadas.

Resolução

a) Começamos por parametrizar as superfícies elipsoidais $E_{(a,c)}$. Para isso recorremos às coordenadas esféricas, alterando as escalas dos eixos coordenados de forma apropriada, e consideramos a parametrização $g(\theta, \phi) = (a \cos(\theta) \operatorname{sen}(\phi), a \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi), c \cos(\phi))$, onde $0 < \theta < 2\pi$ e $0 < \phi < \pi$. Facilmente se verifica que de facto a equação

$$\frac{x(\theta, \phi)^2}{a^2} + \frac{y(\theta, \phi)^2}{a^2} + \frac{z(\theta, \phi)^2}{c^2} = 1,$$

é satisfeita. A função g é de classe C^1 no seu domínio e é injectiva.

A sua matriz derivada é a matriz 3×2,

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -a \,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\mathrm{sen}\,(\phi) & a\cos(\theta)\cos(\phi) \\ a\cos(\theta)\,\mathrm{sen}\,(\phi) & a\,\mathrm{sen}\,(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & -c\,\mathrm{sen}\,(\phi) \end{pmatrix},$$

que tem característica 2 no domínio de g. Concluímos que g é uma parametrizaçaõ de $E_{(a,c)}$. Temos então que

$$V(D_\theta g, D_\phi g) = \sqrt{\det(Dg^t Dg)} = ||D_\theta g \times D_\phi g|| = a\,\mathrm{sen}(\phi)\,\sqrt{a^2\cos^2(\phi) + c^2\,\mathrm{sen}^2\,(\phi)},$$

onde $D_\theta g, D_\phi g$ designam as colunas da matriz Dg.

A densidade de massa no ponto $g(\theta, \phi)$ é dada por $\sigma(g(\theta, \phi)) = c(c^2\,\mathrm{sen}^2\,(\phi) + a^2\cos^2(\phi))^{-1/2}$.

Temos então que a massa das bolas é dada por

$$M(E_{(a,c)}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma(g(\theta,\phi))V(D_\theta g, D_\phi g)(\theta,\phi)d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ac\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\phi d\theta = 4\pi ac.$$

b) Queremos maximizar a função $M(a,c) = 4\pi ac$ na variedade definida por $a^2 + 2c^2 = 1$. vamos portanto utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $F(a,c) = a^2 + 2c^2 - 1$. Temos $\nabla F(a,c) = (2a, 4c)$ e $\nabla M(a,c) = (4\pi c, 4\pi a)$. Temos então de resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla M(a,c) = \lambda \nabla F(a,c) \\ F(a,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi c = \lambda 2a \\ 4\pi a = \lambda 4c \\ a^2 + 2c^2 = 1. \end{cases}$$

Claramente, se $c = 0$ então também $a = 0$ o que é impossível. Do mesmo modo, $a = 0$ implica que $c = 0$ que não satisfaz a terceira equação. Logo, $ac \neq 0$ e concluímos que $c = \lambda a/2\pi$ e substituindo na segunda equação obtemos $\lambda = \sqrt{2}\pi$ se a, c tiverem o mesmo sinal e $\lambda = -\sqrt{2}\pi$ se $ac < 0$. Obtemos então, finalmente, da terceira equação que $a = +1/\sqrt{2}$ ou $a = -1/\sqrt{2}$. Temos portanto quatro soluções para o sistema: $p_1 = (1/\sqrt{2}, 1/2)$, $p_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/2)$, $p_3 = (1/\sqrt{2}, -1/2)$ e $p_4 = (-1/\sqrt{2}, 1/2)$. Observando que a função M é simétrica quando se trocam simultâneamente os sinais de a e c, e tendo em conta que a elipse $a^2 + 2c^2 = 1$ é compacta, pelo que qualquer função contínua lá definida tem máximo e mínimo, concluimos que p_1 e p_2 são máximos e que p_3 e p_4 são mínimos. Escolhendo os parâmetros a e c positivos, temos que as bolas mais pesadas são fabricadas no ponto p_1, ou seja quando $a = 1/\sqrt{2}$ e $c = 1/2$.