Análise Matemática III
2º Semestre de 2000/2001

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 28/5/2001)
Uma partícula desloca-se em $\mathbb{R}^3$ sobre o parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e sob acção do potencial $V(x, y, z) = x^2 - y^2 + z + \operatorname{sen}(y)$.

Determine quais os pontos do parabolóide são pontos de equilíbrio (possivelmente estável ou instável).

Nota: Recorde que um potencial V determina uma força $f = \nabla V$. Como a partícula se move em cima do parabolóide, os pontos de equilíbrio são aqueles em que a força f é perpendicular ao parabolóide, de modo a que nesses pontos não haja componente da força tangente ao parabolóide. Note que estes pontos podem ser achados pelo método dos multiplicadores de Lagrange (que encontra precisamente os pontos em que ∇V é perpendicular ao parabolóide) e que estes correspondem portanto a mínimos locais (equilíbrio estável) ou pontos em sela ou máximos locais (equilíbrio instável) de V.

Solução:

Queremos encontrar os extremos de V através do método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ a equação do parabolóide. Temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla F \\ F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y + \cos(y) = \lambda 2y \\ 1 = \lambda(-1) \end{cases}$$

Estas equações implicam $\lambda = -1, x = 0$ e $\cos(y) = 0$. Logo temos as soluções dadas pelos pontos $p_k = (0, \pi/2 + k\pi, (\pi/2 + k\pi)^2)$. Temos $V(p_k) = (-1)^k$. Podemos então suspeitar que os p_k para k par, onde $V(p_k) = 1$, sejam pontos de equílibrio instável e que p_k para k ímpar, onde $V(p_k) = -1$, sejam pontos de equílibrio estável.

A natureza estável ou instável do equilíbrio só pode ser determinada recorrendo-se às matrizes das segundas derivadas (Hessianas) de F e V. Esta análise não faz parte do programa de AMIII presentemente. No entanto, o resultado é o seguinte: pode mostrar-se que de facto os p_k para k ímpar correspondem a mínimos locais de V, ao passo que os p_k para k par são pontos em sela de V. Este último facto é fácil de perceber: se estamos em p_k com k par e nos deslocamos ao longo da direcção x então V aumenta. Por outro lado ao longo da direcção y os valores de V diminuem e temos então um ponto em sela.