Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 11

Considere as superfícies definidas por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2 + \sqrt{x^2+y^2},\ 0 < z < 1\}$$
$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1,\ (x^2+y^2) < 9\}$$
$$D_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ (x^2+y^2) < 4\}$$

a) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x,y,z) = (x,y,z)$ através de S, segundo a normal unitária cuja componente segundo os z é negativa, usando o teorema da divergência.

b) Calcule o fluxo do campo $h(x,y,z) = (2x\sinh(z), 2y\sinh(z), -4\cosh(z))$, através de S, segundo a normal da alínea anterior, uando o teorema de Stokes.

Solução: S é constituída pelo pedaço do cone vertical $z = -2 + \sqrt{x^2+y^2}$ limitado pelos planos $z=1$ e $z=0$. D_0 é a "tampa" inferior e D_1 a "tampa" superior de S.

a) Seja V o volume limitado por S, D_0, D_1. Pelo teorema da divergência temos que

$$\int_V \text{div} f = \int_S f \cdot \nu + \int_{D_0} f \cdot \nu + \int_{D_1} f \cdot \nu,$$

onde ν é o campo vectorial das normais exteriores unitárias à fronteira de V. Note-se que em S a componente segundo os z de ν é negativa. Temos $\text{div} f(x,y,z) = 3$. Logo, utilizando coordenadas cilindricas,

$$\int_V \text{div} f = 3Vol(V) = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{z+2} \rho d\rho dz d\theta = 19\pi.$$

A normal exterior unitária a D_0 é dada por $\nu = (0,0,-1)$, logo $\int_{D_0} f\cdot\nu = \int_{D_0}(-z) = 0$ já que $z=0$ em D_0.

A normal exterior unitária a D_1 é dada por $\nu = (0,0,1)$, logo $\int_{D_1} f\cdot\nu = \int_{D_1}(z) = 1\cdot Area(D_1) = 9\pi$.

Obtemos o resultado pretendido,

$$\int_S f\cdot\nu = \int_V \text{div} f - \int_{D_0} f\cdot\nu - \int_{D_1} f\cdot\nu = 19\pi - 9\pi = 10\pi.$$

b) Observamos que $h(x,y,z) = \text{rot} l(x,y,z)$, com $l(x,y,z) = (3y\cosh(z), -x\cosh(z), xy\sinh(z))$. Pelo teorema de Stokes,

$$\int_S h\cdot\nu = \int_{\partial D_0} l + \int_{\partial D_1} l,$$

onde ∂D_0 é percorrido no sentido horário e ∂D_1 no sentido anti-horário de um observador que olha no sentido do semi-eixo positivo dos z. Com $\theta \in]0,2\pi[$, temos as parametrizações de ∂D_0 e ∂D_1, $g_0(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0)$ e $g_1(\theta) = (3\cos(\theta), -3\sin(\theta), 1)$ com vectores tangentes $g_0^{'}(\theta) = (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0)$ e $g_1^{'}(\theta) = (-3\sin(\theta), -3\cos(\theta), 0)$.

Com $\cosh(0) = 1$ e $\sinh(0) = 1$ temos então

$$\int_S h\cdot\nu = \int_{\partial D_0} l + \int_{\partial D_1} l =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\sin(\theta), -2\cos(\theta), 0)\cdot(-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0)d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (-9\sin(\theta)\text{cosh}(1), -3\cos(\theta)\text{cosh}(1), \sinh(1))\cdot(-3\sin(\theta), -3\cos(\theta), 0)d\theta =$$

$$= (-12 + 27\text{cosh}(1))\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)d\theta + (-4 + 9\text{cosh}(1))\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta = (-16 + 36\text{cosh}(1))\pi.$$