Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício Teste 10

Considere a superfície, homogénea com densidade de massa ρ, definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -4 + 2(x^2 + z^2), -4 \leq y < 0\}.$$

Escreva uma expressão para o momento de inércia de S em relação ao eixo dos z. Não necessita de calcular o integral.

Solução: S é constituída por uma pedaço de parabolóide com eixo de revolução ao longo do eixo dos y. Podemos usar coordenadas $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ e $\theta = \operatorname{arctg}(y/\sqrt{x^2 + z^2})$, tal que $r \in]\,0, \sqrt{2}\,[$ e $\theta \in]\,0, 2\pi\,[$ e a parametrização será $g(r, \theta) = (r\cos\theta, -4 + 2r^2, r\sin\theta)$.

Temos

$$Dg(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ 4r & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

e portanto

$$V(D_r g, D_\theta g) = ||D_r g \times D_\theta g|| = (\det(Dg^t Dg))^{1/2} = r\sqrt{1 + 16r^2}.$$

A distância de um ponto (x, y, z) ao eixo dos z é dada por $d_z(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

O momento de inércia de S relativamente ao eixo dos z é então obtido atavés de

$$I_z(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d_z^2(g(r, \theta))\, r\sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \rho(r^2\cos^2(\theta) + (-4 + 2r^2)^2) r\sqrt{1 + 16r^2} dr d\theta.$$