Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 1999/2000

Exercício teste 10 (entregar na aula prática da semana de 05/6/00)
Determine os pontos da intersecção do plano $x + z = 1$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e que se encontram mais próximos da origem.
Solução: Consideremos a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

e que corresponde ao quadrado da distância do ponto de coordenadas (x, y, z) à origem.

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$F(x, y, z) = (z - x^2 - y^2 \, , \, x + z - 1)$$

Então, a intersecção do plano com o parabolóide é o conjunto em que $F(x, y, z) = (0, 0)$.

A derivada

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a dois em todos os pontos da intersecção. Portanto, a intersecção do plano com o parabolóide é uma variedade de dimensão um em $\mathbb{R}^3$.

Assim, pretendemos determinar os pontos de mínimo de f e que pertencem à variedade dada pela equação $F(x, y, z) = (0, 0)$.

Portanto, devemos determinar os pontos estacionários da função

$$g(x, y, z) = f(x, y, z) + \alpha F_1(x, y, z) + \beta F_2(x, y, z)$$

em que α e β são os multiplicadores de Lagrange, ou seja, devemos resolver o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2\alpha x + \beta &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 2\alpha y &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z} = 2z + \alpha + \beta &= 0 \\ z - x^2 - y^2 &= 0 \\ x + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Da segunda equação obtemos

$$2y(1 - \alpha) = 0 \iff y = 0 \lor \alpha = 1$$

Então, para $y = 0$, da quarta e quinta equações, temos $x^2 + x - 1 = 0$ e, portanto, obtemos os pontos

$$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) \; ; \; (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Para $\alpha = 1$, da primeira equação, obtemos $\beta = 0$ e, da terceira equação, $z = -1/2$. No entanto, da quarta equação sabemos que $z \geq 0$.

Portanto, os pontos candidatos à solução do problema são

$$(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}) \; ; \; (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

Sendo

$$\begin{aligned} f(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},0,\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}) &= 5-2\sqrt{5} \\ f(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}) &= 5+2\sqrt{5} \end{aligned}$$

concluimos que o ponto mais próximo é

$$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},0,\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})$$