

Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001
(a entregar na semana de 27/11/2000)

Exercício Teste 10

Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1; -1 < z < 1\}.$$

Mostre que M é uma variedade, indicando explicitamente parametrizações cujas imagens cubram M . Determine a dimensão de M .

Solução:

O Conjunto M é um pedaço de catenóide compreendido entre os planos $z = -1$ e $z = 1$, conforme representado na Figura 1.

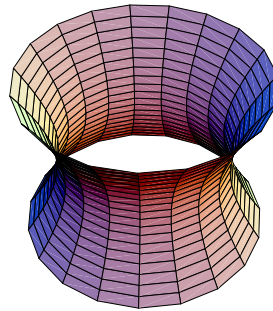


FIGURA 1. A variedade M

Em coordenadas cilíndricas podemos descrever M da forma seguinte

$$\rho = \sqrt{z^2 + 1}; \quad -1 < z < 1.$$

Assim, podemos escrever duas parametrizações, dadas por

$$g_1(\theta, z) = (\sqrt{z^2 + 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 + 1} \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in V_1 =]0, 7\pi/4[\times]-1, 1[$$

$$g_2(\theta, z) = (\sqrt{z^2 + 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 + 1} \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in V_2 =]-\pi, 3\pi/4[\times]-1, 1[.$$

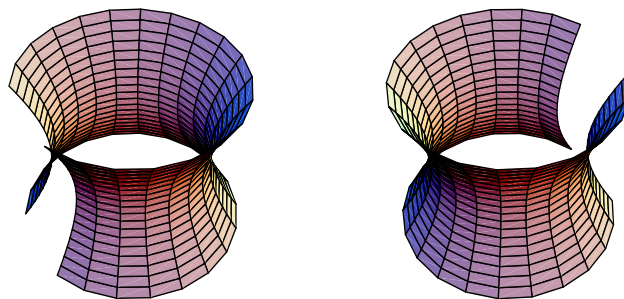


FIGURA 2. Vizinhanças de coordenadas correspondentes às parametrizações g_1 (à esquerda) e g_2 (à direita).

As funções g_1 e g_2 são de classe C^1 , injectivas, e têm matrizes jacobianas dadas pela mesma expressão (para valores diferentes de (θ, z)):

$$Dg_1(\theta, z) = Dg_2(\theta, z) = \begin{bmatrix} -\sqrt{z^2 + 1} \operatorname{sen} \theta & \frac{z \cos \theta}{\sqrt{z^2 + 1}} \\ \sqrt{z^2 + 1} \cos \theta & \frac{z \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{z^2 + 1}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem característica 2 pois o produto externo

$$\begin{aligned} (-\sqrt{z^2 + 1} \operatorname{sen} \theta, \sqrt{z^2 + 1} \cos \theta, 0) \times \left(\frac{z \cos \theta}{\sqrt{z^2 + 1}}, \frac{z \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{z^2 + 1}}, 1 \right) = \\ = (\sqrt{z^2 + 1} \cos \theta, \sqrt{z^2 + 1} \operatorname{sen} \theta, -z) \end{aligned}$$

é diferente de zero (tem norma $\sqrt{2z^2 + 1}$), o que implica que as colunas são linearmente independentes. Portanto, g_1 e g_2 são parametrizações. Como $M = g_1(V_1) \cup g_2(V_2)$, concluímos que M é uma variedade de dimensão 2 (igual ao número de variáveis das parametrizações).