Análise Matemática III
1º semestre de 2001/02

Exercício 10

Feriado Gaudêncio é irmão de Marcelino Gaudêncio, e também não tem tido uma vida nada fácil. Em boa verdade, Feriado é um encenador falhado do teatro de revista. Com o intuito de ajudar o irmão a ultrapassar uma difícil crise de meia idade aos 30 anos – após mais uma produção fracassada no parque Mayer – Marcelino convidou-o para encenar um espectáculo inovador com o seu famoso circo de formigas amestradas. O espectáculo consistia em pôr as formigas esquiar a uma velocidade alucinante ao longo de uma rampa com a forma do conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x\,\mathrm{tg}(z),\ -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Colocado perante esta proposta, Feriado teve uma daquelas reacções desencorajadoras que o caracterizam, perguntando:

– Mano, tens a certeza que isto é um número de variedades ?

(a) Ajude Marcelino a sossegar o irmão, mostrando que M é uma variedade de dimensão 2.

(b) Determine os pontos p em que M é vertical [1]. Ou seja, determine os pontos p tais que T_pM contém o vector $(0, 0, 1)$.

Soluçâo:

(a) Seja $f : \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função de classe C^1, definida por $f(x, z) = x\,\mathrm{tg}(z)$. Notando que M é o gráfico de f:

$$M = \left\{(x, f(x, z), z : (x, z) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\},$$

conclui-se que M é uma variedade de dimensão 2.

Em alternativa, M é uma variedade de dimensão 2 pois é o conjunto de nível zero da função de classe C^1, $F(x, y, z) = y - x\,\mathrm{tg}\,z$:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ : F(x, y, z) = 0\right\},$$

e a matriz $DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\mathrm{tg}\,z & 1 & -x\sec^2 z \end{pmatrix}$ tem característica máxima (igual a 1) em todos os pontos de M.

(b) Pretende-se determinar o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que $(0, 0, 1) \in T_pM$. Ora, de acordo com a resposta a (a), o espaço ortogonal a M em $p = (x, y, z)$ é gerado pelo vector $(-\mathrm{tg}\,z, 1, -x\sec^2 z)$. Tem-se

$$(0, 0, 1) \in T_pM \Leftrightarrow (0, 0, 1) \cdot (-\mathrm{tg}\,z, 1, -x\sec^2 z) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

portanto o conjunto dos pontos onde M é vertical é

$$\{(x, y, z) \in M : x = 0\} = \left\{(0, 0, z) : -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

[1] A resposta é relevante para a escolha da iluminação do espectáculo