Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 10: (a entregar na semana de 25/11/2002)

(Superfície de revolução) Seja M uma superfície de revolução obtida por rotação em torno do eixo Oz, de uma curva no plano xOz que não intersecta o eixo de rotação. Seja

$$\gamma(t) = (r(t), 0, h(t)), \quad t \in I$$

uma parametrização injectiva dessa curva no plano xOz, onde r e h são funções de classe C^1 num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $r(t) > 0$ e $r'(t)$ e $h'(t)$ não se anulam simultaneamente.

a) Quais as variedades obtidas quando

   i) $\gamma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad t \in]0, \pi[$;

   ii) $\gamma(t) = (1, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}$;

   iii) $\gamma(t) = (t, 0, t), \quad t \in]0, +\infty[$.

b) Mostre que a aplicação $g : I \times]0, 2\pi[\to M$ definida por

$$g(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t)),$$

é uma parametrização de M.

Sugestão: Utilize o facto que, para $a, b \neq 0$, os vectores $a(\cos\theta, \sin\theta)$ e $b(-\sin\theta, \cos\theta)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$.

c) Determine o espaço tangente a M num ponto da forma $(0, r(t), h(t))$ (i.e. quando $\theta = \frac{\pi}{2}$) e dê uma base deste espaço para cada um dos exemplos de $a)$ num ponto com $t = \pi/2$.

Resolução:

a) i) A curva representada por γ é a semi-circunferência no plano xOz definida por $y = 0$ e $x^2 + z^2 = 1$ com $x > 0$. Assim, a variedade obtida por rotação desta curva em torno do eixo Oz é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$ sem o pontos $(0, 0, 1)$ e $(0, 0, -1)$:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}.$$

ii) O caminho γ representa a recta vertical no plano xOz definida por $x = 1$ e $y = 0$. A variedade obtida por rotação desta curva em torno do eixo Oz é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

iii) A curva representada por γ é a semi-recta no plano xOy definida por $y = 0$ e $z = x$ com $x > 0$. A variedade obtida por rotação desta curva em torno do eixo Oz é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sem o seu vértice:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \backslash \{(0, 0, 0)\}.$$

b) A aplicação $g : I \times]0, 2\pi[\to M$ é de classe C^1 (as funções r e h são de classe C^1) e injectiva. Com efeito, se $g(t_1, \theta_1) = g(t_2, \theta_2)$, então

$$\begin{cases} r(t_1) \cos\theta_1 = r(t_2) \cos\theta_2 \\ r(t_1) \sin\theta_1 = r(t_2) \sin\theta_2 \\ h(t_1) = h(t_2). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} r^2(t_1) \cos^2\theta_1 & = & r^2(t_2) \cos^2\theta_2 \\ r^2(t_1) \sin^2\theta_1 & = & r^2(t_2) \sin^2\theta_2, \end{array}$$

pelo que $r^2(t_1) \left(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1\right) = r^2(t_2) \left(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\right)$, ou seja $r^2(t_1) = r^2(t_2)$. Consequentemente, $r(t_1) = r(t_2)$ (pois $r > 0$). Como, além disso, $h(t_1) = h(t_2)$ e γ é injectiva, concluimos que $t_1 = t_2$ e então g é injectiva.

Vamos agora mostrar que Dg é injectiva.

$$Dg(t, \theta) = \begin{bmatrix} r'(t) \cos\theta & -r(t) \sin\theta \\ r'(t) \sin\theta & r(t) \cos\theta \\ h'(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Se $h'(t) \neq 0$, então as duas colunas de Dg são claramente linearmente independentes. Se $h'(t) = 0$, então $r'(t) \neq 0$ pois $r'(t)$ e $h'(t)$ não se anulam simultaneamente. Como, além disso, $r(t) \neq 0$, os vectores $r'(t)(\cos\theta, \sin\theta)$ e $r(t)(-\sin\theta, \cos\theta)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ e então as duas colunas de Dg são linearmente independentes. Conclui-se assim que, em ambos os casos, Dg é injectiva.

c) O espaço tangente de M num ponto é gerado pelas colunas da matriz Dg nesse ponto. Assim, num ponto da forma $(0, r(t), h(t))$ (i.e. com $\theta = \pi/2$) temos

$$Dg(t, \pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -r(t) \\ r'(t) & 0 \\ h'(t) & 0 \end{bmatrix},$$

e então o espaço tangente correspondente é dado por:

$$\begin{aligned} T_{(0,r(t),h(t))}M &= \mathcal{L}\{(0, r'(t), h'(t)), (-r(t), 0, 0)\} \\ &= \{\alpha(0, r'(t), h'(t)) + \beta(-r(t), 0, 0),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

No exemplo $a)$ $i)$ temos, num ponto com $t = \pi/2$,

$$\begin{aligned} r(\pi/2) &= \sin(\pi/2) = 1 & h(\pi/2) &= \cos(\pi/2) = 0 \\ r'(\pi/2) &= \cos(\pi/2) = 0 & h'(\pi/2) &= -\sin(\pi/2) = -1. \end{aligned}$$

Assim, $(0, r(t), h(t)) = (0, 1, 0)$ e o espaço tangente correspondente

$$T_{(0,1,0)}M = \mathcal{L}\{(0, 0, -1), (-1, 0, 0)\}$$

é o plano $y = 0$.

No exemplo $a)$ $ii)$ temos, num ponto com $t = \pi/2$,

$$\begin{aligned} r(\pi/2) &= 1 & h(\pi/2) &= \pi/2 \\ r'(\pi/2) &= 0 & h'(\pi/2) &= 1, \end{aligned}$$

pelo que $(0, r(t), h(t)) = (0, 1, \pi/2)$ e

$$T_{(0,1,\pi/2)}M = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$$

é novamente o plano $y = 0$.

No exemplo $a)$ $iii)$ temos, num ponto com $t = \pi/2$,

$$\begin{aligned} r(\pi/2) &= \pi/2 & h(\pi/2) &= \pi/2 \\ r'(\pi/2) &= 1 & h'(\pi/2) &= 1, \end{aligned}$$

pelo que $(0, r(t), h(t)) = (0, \pi/2, \pi/2)$ e o espaço tangente correspondente

$$T_{(0,\pi/2,\pi/2)}M = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (-\pi/2, 0, 0)\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$$

é o plano $y = z$.