Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício Teste 10

Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = (z - y)^2 + x^2\}.$$

a) Mostre que M é uma variedade. Determine a sua dimensão.
b) Encontre uma parametrização para M.
c) Em que ponto de M é que o espaço tangente é dado pelo plano xz ?

Solução:

a) Seja $F(x, y, z) = z + y - (z - y)^2 - x^2$. Então M é o espaço das soluções da equação $F = 0$. Temos $\nabla F(x, y, z) = (-2x, 1 + 2(z - y), 1 - 2(z - y))$. Logo, como $1 + 2(z - y)$ e $1 - 2(z - y)$ nunca se anulam simultâneamente, temos $\nabla F(x, y, z) \neq 0$ em todos os pontos de M que é consequentemente uma variedade diferencial de dimensão 2.

b) Seja $u = z + y$ e $v = z - y$. Em termos de coordenadas x, u, v vemos que M é um parabolóide de revolução com o eixo de simetria sendo o eixo dos u dado por $u = v^2 + x^2$. Logo, como $z = 1/2u + 1/2v$ e $y = 1/2u - 1/2v$ uma parametrização para M será $g(x, v) = (x(x, v), y(x, v), z(x, v)) = (x, (1/2)(v^2 + x^2 - v), (1/2)(v^2 + x^2 + v))$, para $x, v \in \mathbb{R}$.

Facilmente se verifica que $F(g(x, v)) = 0$ como pretendido.

Temos que g é injectiva e tem derivadas contínuas e a matriz derivada

$$Dg(x, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & v - 1/2 \\ x & v + 1/2 \end{bmatrix}.$$

tem sempre carcterística 2. Logo, g é uma parametrização de M.

c) No ponto em que o espaço tangente é o plano xz, o espaço normal tem de ser o eixo dos y. Ora, o espaço normal a M num ponto é gerado por $\nabla F(x, y, z) = (-2x, 1 + 2(z - y), 1 - 2(z - y))$. Logo, temos de ter $x = 0$ e $1 - 2(z - y) = 0$, i.e. $z - y = 1/2$. Substituindo em $F = 0$ obtemos $z + y - 1/4 = 0$. Logo, $z = 3/8$ e $y = -1/8$. O ponto desejado é portanto o ponto $(0, -1/8, 3/8)$.