Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2000/2001

Exercício Teste 1

Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4-2(x^2+y^2), \text{ se } 0 \leq x^2+y^2 \leq 1;\ 0 \leq z \leq 3-(x^2+y^2), \text{ se } 1 < x^2+y^2 \leq 3\}.$$

a) Esboce a região V.

b) Descreva detalhadamente os cortes obtidos pela intersecção de V com os planos horizontais $z =$ constante, para $0 \leq z \leq 4$.

c) Calcule a área da figura definida por $V \bigcap (\text{semi} - \text{plano } x = 0,\ y \geq 0)$.

Solução:

a) V é o volume compreendido entre plano xy e os parabolóides de equações $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$, quando $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, e $z = 3 - (x^2 + y^2)$, quando $1 < x^2 + y^2 \leq 3$. Obtemos assim um sólido de revolução, limitado por cima pela superfície obtida por revolução à volta do eixo dos z do gráfico da função

$$z = f(y) = \begin{cases} z = 4 - 2y^2, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ z = 3 - y^2, & \text{se } 1 < y \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

De facto, um corte vertical de V segundo o plano yz, ou seja o plano $x = 0$, para $y \geq 0$, fornece uma área que está compreendida entre o eixo dos y, para $0 \leq y \leq \sqrt{3}$, e o gráfico de $f(y)$.

b) Como V é um sólido de revolução, tendo simetria cilíndrica com o eixo de simetria sendo o dos z, os cortes com $z =$ constante vão ser círculos ou coroas circulares.

Para $2 \leq z = z_0 \leq 4$, vamos ter o corte $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0,\ x^2 + y^2 \leq (4 - z)/2\}$ que representa um disco de raio $\sqrt{(4-z)/2}$ centrado no eixo dos z e à altura $z = z_0$.

Para $0 \leq z = z_0 < 2$, vamos ter o corte $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0,\ x^2 + y^2 \leq 3 - z\}$ que representa um disco de raio $\sqrt{3-z}$ centrado no eixo dos z e à altura $z = z_0$.

c) Como se viu em a) esta área é a que está abaixo do gráfico da função $f(y)$. Logo a área pode ser calculada através do integral desta função:

$$\text{área do corte} = \int_0^1 (4 - 2y^2)dy + \int_1^{\sqrt{3}} (3 - y^2)dy = 2/3 + 3\sqrt{3} - (\sqrt{3})^3/3.$$