Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício teste 1

Esboce detalhadamente o conjunto S descrito por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$$

Solução: As superfícies

$$z = 1 + x^2 + y^2 \tag{1}$$

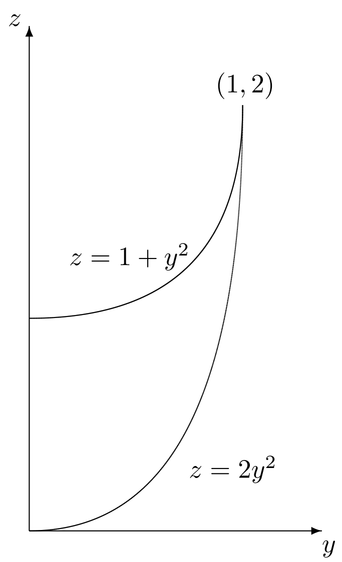
e

$$z = 2x^2 + 2y^2 \tag{2}$$

são superfícies de revolução em torno do eixo Oz (z é função apenas da distância $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de (x, y) a $(0, 0)$). Assim, para esboçar o conjunto definido pelas condições

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \tag{3}$$

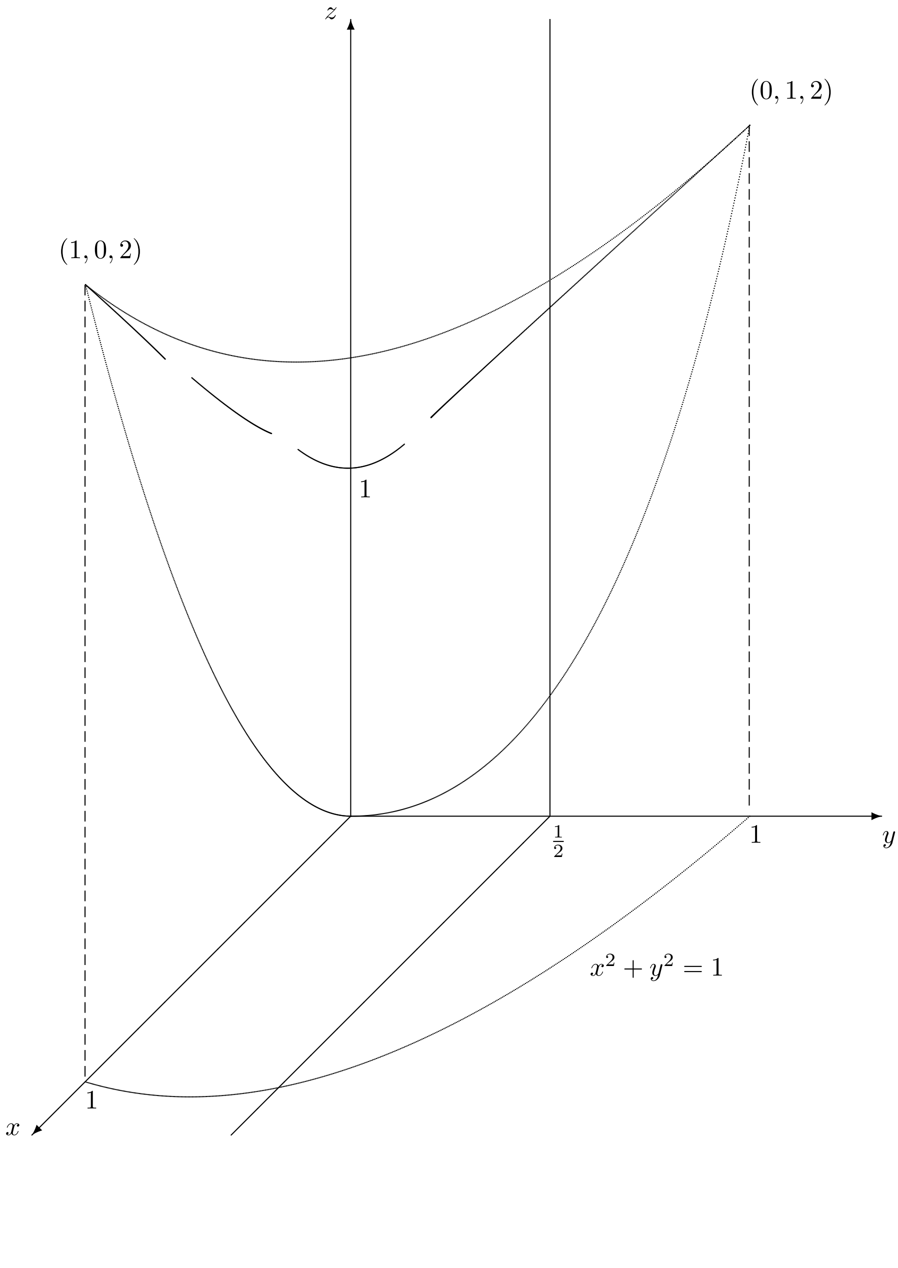
basta considerar a intersecção das superfícies com o plano coordenado Oyz:



A região descrita em (3) é a região que se obtém rodando a figura acima em torno do eixo Oz sobre o primeiro quadrante do plano Oxy. Isto é, é a região entre os gráficos dos parabolóides de revolução (2) e (1) sobre o quarto de círculo

$$x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Esta região tem o aspecto seguinte:



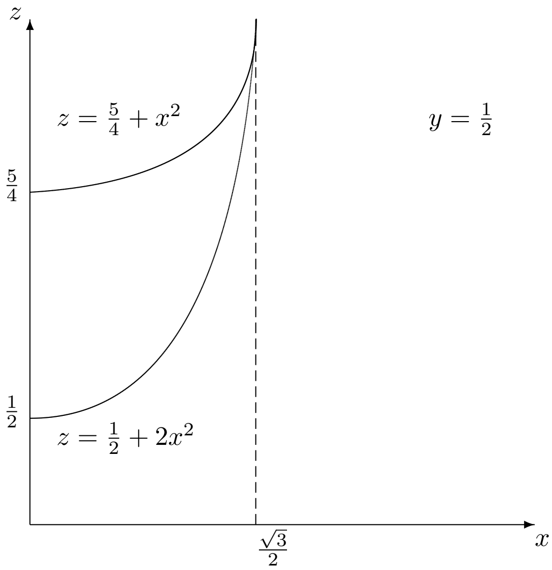
O conjunto S é a porção do sólido da figura anterior que se encontra à esquerda do plano vertical definido pela equação $y = \frac{1}{2}$. A intersecção de S com o plano $y = \frac{1}{2}$ é a figura limitada pelas linhas que se obtêm intersectando os parabolóides com o plano:

$$\begin{cases} z = 2x^2 + 2y^2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x^2 + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z = 1 + x^2 + y^2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} z = x^2 + \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto a intersecção é dada por:



Com base nesta informação podemos finalmente esboçar o conjunto S: