Análise Matemática III
2º semestre de 2000/2001

Exercício teste 3 (a entregar na aula prática da semana de 2/4/2001)

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x^2}$, e considere $x \in [1, +\infty[$.

a) Calcule os termos da sucessão $a_k = \int_k^{k+1} f(x)dx$, com $k \in \mathbb{N}$.

b) Determine se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é ou não convergente e utilize esse resultado para determinar se $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existe. Justifique (recorrendo, por exemplo, à definição de função limite superior).

2. Seja $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, e considere $x \in [1, +\infty[$.

a) Calcule os termos da sucessão $b_k = \int_{k^2}^{(k+1)^2} g(x)dx$, com $k \in \mathbb{N}$.

b) Determine se a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é ou não convergente e utilize esse resultado para determinar se $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ existe. Justifique (recorrendo, por exemplo, à definição de função limite superior).

NOTA: Este exercício destina-se a relacionar a integrabilidade de uma função contínua <u>positiva</u> $f(x)$ no intervalo $[1, +\infty[$, com o comportamento da série dos seus integrais em $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$ (por exemplo). Utilizando-se a definição de função limite superior para justificar as respostas às alíneas 1b) e 2b), percebe-se que a positividade das funções envolvidas é importante para o argumento, pelo que o mesmo <u>não</u> pode ser utilizado da mesma forma para funções não positivas.