Análise Matemática III
Exercícios

Mudança de variáveis de integração

1 Esboce a região de integração e exprima o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ como um integral iterado em coordenadas polares.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,\ x \geq 0\}$ onde $b > a > 0$

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$

e) $S = [0,1] \times [0,1]$

2 Transforme cada um dos integrais num integral em coordenadas polares e calcule o valor do integral.

a) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2) dydx$

b) $\displaystyle\int_0^{a} \int_0^{x} \sqrt{x^2 + y^2} dydx$

3 Considere o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}$.

a) Calcule $\displaystyle\int_S \cos(x^2 + y^2)$.

b) Determine as coordenadas do centróide de S.

4 Use uma tranformação linear de variáveis apropriada para calcular o integral

$$\int\int_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y) dxdy$$

onde S é o paralelograma com vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

5 Considere a transformação de variáveis definida por

$$x = u + v,\ y = v - u^2$$

em $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > -\frac{1}{2}\}$.

a) Calcule o Jacobiano da transformação, $J(u,v)$

b) Esboce a imagem S no plano xOy do triângulo T no plano uOv com vértices em $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$.

c) Calcule a área de S por meio de um integral duplo sobre S e também por meio de um integral duplo sobre T.

d) Calcule $\displaystyle\int\int_S \frac{1}{(x-y+1)^2}dxdy$.

6 Mostre por meio de uma mudança de coordenadas apropriada que

$$\int\int_S f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$$

onde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

7 Mostre por meio de uma mudança de coordenadas apropriada que

$$\int\int_S f(xy)dxdy = \log 2 \int_1^2 f(u)du$$

onde S é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$.

8 Supondo que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, transforme o integral duplo $\int\int_S f(\frac{y}{x})dxdy$ onde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2\}$ num integral simples com extremos de integração 1 e 2.

9 Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$(u,v) = g(x,y) = (-y + x^2, 2x)$$

a) Justifique que g é uma transformação de coordenadas e calcule g^{-1}

b) Usando esta transformação de coordenadas, calcule o integral

$$\int\int_A xe^{-y+x^2}dxdy$$

onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\}$.

10 Considere os conjuntos $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 - y^2 < 1, 0 < 2xy < 2, y > 0\}$ e $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -1 < u < 1, 0 < v < 2\}$.

a) Prove que $g(x,y) = (u,v) = (x^2 - y^2, 2xy)$ é uma mudança de coordenadas entre X e U.

b) Calcule $\displaystyle\int\int_X x^3y + y^3x dxdy$.

11 Calcule os integrais seguintes, usando coordenadas cilíndricas:

a) $\displaystyle\int\int\int_S (x^2+y^2)dxdydz$ onde S é o sólido limitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2z$ e o plano $z = 2$.

b) $\displaystyle\int\int\int_S \frac{1}{(1+z^2)^2} dxdydz$ onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2+1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

12 Calcule os integrais seguintes, usando coordenadas esféricas:

a) $\displaystyle\int\int\int_S dxdydz$ onde S é o sólido limitado por duas esferas concentricas de raios a e b com $a < b$.

b) $\displaystyle\int\int\int_S (x^2+y^2)dxdydz$ onde S é o sólido limitado pela superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e o plano $z = 2$.

13 Calcule o volume do sólido limitado pelo plano Oxz, pelo cilindro $x^2 + z^2 + 2x = 0$ e pelo cone $y = \sqrt{x^2+z^2}$.

14 Calcule a massa do sólido $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$ sabendo que a densidade de massa no ponto (x,y) é dada por $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

15 Calcule o volume da região $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq \sqrt{z^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ usando coordenadas cilíndricas apropriadas e coordenadas esféricas.

16 Calcule o centróide do sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq 2x^2+2y^2+4z^2 \leq 4,\ x,y,z \geq 0\}$.

17 Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1. Suponha que o eixo de rotação da broca passa pelo centro da esfera. Determine o volume do material removido da esfera.

18 Calcule o momento de inércia de uma esfera homogénea de raio R e massa M em torno de um diâmetro.

19 Determine o volume da região $A \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelas superfícies $z^2 = x^2+4y^2$ e $z = 2x^2+8y^2$.

20 Calcule o volume do sólido formado pela união de dois cilindros de altura e diâmetro 1 cujos eixos se intersectam fazendo um ângulo recto no seu ponto médio.

21 Considere os conjuntos $D_n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + \ldots + |x_n| \leq a\}$. Mostre que o volume n-dimensional destes conjuntos é dado por

$$\mathrm{Vol}(D_n(a)) = \frac{2^n a^n}{n!}$$

da seguinte forma:

a) Mostre que $\mathrm{Vol}(D_n(a)) = a^n\,\mathrm{Vol}(D_n(1))$

b) Para $n \geq 2$, escreva o integral para calcular o volume de $D_n(1)$ por meio da iteração de um integral de uma variável e de um integral de $n-1$ variáveis e mostre que

$$\mathrm{Vol}(D_n(1)) = \frac{2}{n}\,\mathrm{Vol}(D_{n-1})(1))$$

c) Conclua que $\mathrm{Vol}(D_n(a)) = \frac{2^n a^n}{n!}$

22 Mostre por meio de um exemplo que o centróide de um sólido de revolução em $\mathbb{R}^3$ não tem de coincidir com o centróide de uma sua secção por um plano que contenha o eixo de revolução.