Análise Matemática III
Exercícios

Teorema de Fubini

1 Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int\int_Q \sqrt{y} + x - 3xy^2 dxdy$, com $Q = [0,1] \times [0,1]$

b) $\displaystyle\int\int_Q sen^2 x \operatorname{sen}^2 y dxdy$, com $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

c) $\displaystyle\int\int_Q sen(x+y)dxdy$, com $Q = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$

d) $\displaystyle\int\int_Q |cos(x+y)|dxdy$, com $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

e) $\displaystyle\int\int_Q \frac{e^{\frac{2x}{y}}}{y^3} dxdy$, com $Q = [0,2] \times [1,2]$

f) $\displaystyle\int\int\int_Q xy^2z^3 dxdydz$, com $Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$

2 Calcule o volume da região debaixo do gráfico da função definida no intervalo $Q = [0,1] \times [0,1]$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{se } x + y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3 Esboce o conjunto S definido pelos limites de integração do integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{\operatorname{arcsen} y} y \operatorname{sen} x dxdy$$

Obtenha os limites de integração na ordem inversa e calcule o integral.

4 Esboce a região de integração e calcule o integral.

a) $\displaystyle\int\int_S x\cos(x+y)dxdy$ onde S é o triângulo com vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ e (π,π).

b) $\displaystyle\int\int_S e^{x+y} dxdy$ onde $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

5 Esboce a região de integração e inverta a ordem de integração dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y f(x,y)dxdy$

b) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dydx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

d) $\displaystyle\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)dydx$

e) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\log x} f(x,y)dydx$

f) $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)dydx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dydx$

h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2-2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{2y^2-1} f(x,y)dxdy$

j) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x,y,z)dzdydx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \int_0^{x^2} f(x,y,z)dzdydx$

l) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dzdydx$

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2-y^2}^1 f(x,y,z)dzdydx$

6 Considere o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, y+x-1 \leq 0, y \leq x\}$. Escreva uma expressão para área de S em termos de integrais iterados nas duas ordens de integração possíveis.

7 Esboce a região de integração e calcule cada um dos seguintes integrais.

a) $\int\int\int_S xy^2z^3dxdydz$ onde S é o sólido limitado pelos três planos coordenados, pela superfície $z = xy$ e pelo plano $x + y = 1$.

b) $\int\int\int_S \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz$ onde S é a região limitada pelos três planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

c) $\int\int\int_S \sqrt{1+y}\,dxdydz$ onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2 - 1,\ x \geq 0, y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$.

8 Escreva o volume de S sob a forma de integrais simples sucessivos nas ordens de integração x, y, z e z, y, x e calcule o volume de S.

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$

9 Esboce o sólido S e calcule o seu volume por meio de um integral iterado.

a) S é a pirâmide em $\mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + 3y + 5z = 1$.

b) S é o sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 - y^2$, $z = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.

10 Considere a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Verifique o teorema de Fubini neste caso particular da seguinte forma:

a) Mostre que f é integrável e calcule, usando as propriedades dos integrais múltiplos, o valor de $\int_{[0,1]\times[0,1]} f$

b) Calcule os integrais iterados $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dy\right) dx$ e $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dx\right) dy$

11 Calcule o centróide da região $S \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

a) $y = x^2$, $x + y = 2$

b) $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$

c) $y = \log x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$

d) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$

e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ $x = 0$, $y = 0$ e contida no primeiro quadrante.

12 Determine a massa e o centro de massa de uma placa fina limitada em $\mathbb{R}^2$ pelo arco de parábola $y = 2x - x^2$ e pelo segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sabendo que a densidade de massa em cada ponto (x, y) é $\frac{1-y}{1+x}$.

13 Calcule os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados para cada uma das placas finas limitadas em $\mathbb{R}^2$ pelas curvas dadas e com densidade de massa constante igual a 1.

a) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ com $y \leq a$, e $x = y$, $y = a$

b) $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$ no primeiro quadrante.

14 Prove a "lei dos eixos paralelos": Se S é uma placa fina de massa m e L_0 e L são dois eixos paralelos, no plano de S tal que L_0 passa pelo centro de massa de S. Então os momentos de inércia de S em relação aos dois eixos estão relacionados pela fórmula:

$$I_L = I_{L_0} + mh^2$$

onde h designa a distância entre os dois eixos.

15 Determine a distância média de um canto de um quadrado de lado h aos pontos do interior do quadrado.

16 Mostre que

$$\int_0^x \int_0^v \int_0^u f(t)dtdudv = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$