

Análise Matemática III

Exercícios

Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e Teorema de Green.

1 Indique quais dos seguintes conjuntos são conexos por arcos e quais são conjuntos em estrela.

- a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \text{ e } (x - 3)^2 + y^2 > 1\}$
- c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } (x - 3)^2 + y^2 < 1\}$
- d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$
- e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > 1 + z^2\}$
- f) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$
- g) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$
- h) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < 1\}$

2 Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x, y) = (x, y)$ sobre uma partícula que se move entre os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ ao longo de

- a) Um segmento de recta.
- b) Um arco da curva $y = x^3$.

O campo de forças é conservativo?

3 Um campo de forças em \mathbb{R}^3 é definido pela equação

$$F(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (y + 5)\mathbf{k}$$

- a) Determine se F é ou não conservativo.
- b) Calcule o trabalho realizado pela força F sobre uma partícula cuja trajectória é descrita por

$$\alpha(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$$

com t a variar entre 0 e π .

4 Determine se os campos de forças dados pelas expressões seguintes são ou não conservativos. Em caso afirmativo determine uma função potencial e caso contrário determine uma curva fechada C tal que

$$\oint_C F \neq 0$$

- a) $F(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 b) $F(x, y) = (2x \operatorname{sen}(x + y^2) + x^2 \cos(x + y^2))\mathbf{i} + 2x^2y \cos(x + y^2)\mathbf{j}$
 c) $F(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
 d) $F(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} - (4 - 2y \operatorname{sen} x)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$
 e) $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (x^2 + 1)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 f) $F(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1)\mathbf{i} + 2(x^2 + 1 - yz)\mathbf{j} - (2x^3z + 3z^2 + y^2)\mathbf{k}$

5 Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (x^2 + y^2, \alpha xy)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, e considere a curva $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (t, e^{t^2} - 1)$.

- a) Calcule o valor de α para o qual F é um gradiente em \mathbb{R}^2 .
 b) Calcule o trabalho do campo F realizado ao longo do caminho g com o valor de α determinado na alínea anterior.

6 Seja $F(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{y-x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}\right)$.

- a) O campo F é gradiente no seu domínio de definição. Justifique esta afirmação.
 b) Calcule a função potencial $\varphi(x, y)$ de F que satisfaz $\varphi(0, 1) = 2$.

7 Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

- a) Mostre que F é fechado.
 b) Calcule o integral $\oint_C F$ onde C é a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida no sentido directo.
 c) O campo F é gradiente?
 d) Dê uma expressão para o ângulo $\theta(x, y) \in]-\pi, \pi[$ das coordenadas polares no conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \leq 0\}$ e mostre que θ é uma função potencial para F neste conjunto.

8 Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

Calcule o integral de linha de F ao longo do caminho fronteiro a um losango, que une os pontos $(2, 0)$, $(0, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ percorrido no sentido horário.

9 Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e considere o campo vectorial definido para $r \neq 0, 1$ dado por

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{r(1-r)}, \frac{y}{r(1-r)} \right)$$

Decida se o campo F é um gradiente em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Em caso afirmativo, aproveite para calcular um integral de linha

$$\int_L F$$

onde L é uma linha seccionalmente C^1 com início em $(0, 2)$ e fim em $(1, 1)$ cuja distância à origem é maior do que 1.

10 Um fluido flui no plano xy menos a origem. Cada partícula afasta-se da origem em linha recta de tal forma que, quando uma partícula está à distância r da origem, a sua velocidade é de ar^n onde a e n são constantes.

- Determine para que valores de a e de n o campo vectorial das velocidades é um campo gradiente.
- Para cada um dos valores anteriores, calcule uma função potencial (note que o caso $n = -1$ é especial).

11 Um campo de forças *radial* (ou central) é um campo de forças $F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que pode ser descrito por uma expressão da forma

$$F(x, y, z) = f(r)\mathbf{r}$$

onde $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância à origem e

$$\mathbf{r} = \frac{1}{r}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

Mostre que um campo de forças radial é conservativo.

12 Mostre que se S é um conjunto de \mathbb{R}^n conexo por arcos e φ e ψ são duas funções potencial para o campo vectorial $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ então $\varphi - \psi$ é constante em S .

13 Calcule, utilizando o Teorema de Green, o integral

$$\oint_C y^2 dx + x dy$$

onde C é o círculo de raio 2 e centro na origem percorrido no sentido directo.

14 Calcule o integral de linha

$$\oint_C xe^{-y^2} dx + (-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2})dy$$

onde C é a fronteira do quadrado definido pelas equações $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ percorrida no sentido dos ponteiros do relógio.

15 Se f e g são campos escalares de classe C^1 num subconjunto S de \mathbb{R}^2 aberto e conexo por arcos, mostre que

$$\oint_C f\nabla g = -\oint_C g\nabla f$$

para toda a curva C contida em S e representada por um caminho fechado, regular, e simples.

16 Calcule todos os valores possíveis do integral

$$\oint_C \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

onde C é uma curva regular fechada simples em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

17 Seja F um campo vectorial de classe C^1 , fechado e definido em $S = \mathbb{R}^2 - \{P_1, P_2, P_3\}$ onde P_i são pontos do plano. Sejam C_1, C_2 e C_3 circunferências centradas em cada um destes pontos, percorridas no sentido directo e tais que C_i contem apenas o ponto P_i . Suponha que

$$\oint_{C_i} F = I_i$$

onde $I_1 = 12, I_2 = 9, I_3 = 15$.

- Calcule todos os valores possíveis de $\oint_C F$ para C uma curva percorrida por um caminho regular fechado e simples que não passe por nenhum dos pontos P_i .
- Mostre que não existe nenhuma curva fechada¹ regular C contida em S para a qual se tenha

$$\oint_C F = 1$$

¹Não necessariamente simples