

## Análise Matemática III

### Exercícios

### Complementos de Cálculo Integral

#### Teoremas de Convergência. Integrabilidade

1. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$
2. Calcule o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$
3. Seja  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ . Prove que  $f$  é integrável em  $]0, +\infty[$ .
4. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx$ .
5. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx$ .
6. Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos^n(x) dx$ .
7. Decida se existe ou não o integral  $\int_1^{\infty} (t \operatorname{sen}(\frac{1}{t}) - 1) dt$
8. Decida se existe ou não o integral  $\int_1^{\infty} (1 - e^{-1/t^2}) dt$ . (Sugestão: Considere  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-1/t^2}}{1/t^2}$ ).
9. Calcule  $\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$  em que  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ .
10. Use o teorema da Convergência Dominada para calcular 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)^n} dx dy$$
11. Prove que a função dada por  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$  é integrável no conjunto  $[1, +\infty[$  e calcule o respectivo integral.
12. Considere o conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^2 < 1, x > 1, 0 < y < 1\}$  e a função  $f_{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definida por  $f_{\alpha}(x, y) = x^{\alpha}$ .
  - i) Determine os valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para os quais  $f_{\alpha}$  é integrável em  $S$ .
  - ii) Para cada  $\alpha$  determinado na alínea anterior, calcule  $\int_S f_{\alpha}$ . Justifique todos os cálculos.

13. Seja  $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f_n(x, y) = \frac{1 + \cos^n(x - y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n$  existe e calcule o seu valor. Justifique.

14. Seja  $\gamma_n$  o gráfico da função  $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{n}}$  definida no intervalo  $[0, 1]$ . Seja  $l(\gamma_n)$  o comprimento de  $\gamma_n$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\gamma_n) = \sqrt{2}$ .

15. Calcule, justificadamente,

i)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (|x| + |y|)^k} dx dy$$

ii)

$$\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz$$

em que  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

iii)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^{k+1}} dx dy$$

16. Sejam  $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , as funções definidas por  $f_n(x, y) = \frac{e^{-(x^2+y^2)^n}}{1+x^2+y^2}$ .

Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_n$ . Justifique os cálculos.

17. Sejam  $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), as funções definidas por

$$f_k(x, y) = \frac{1 + (\cos(x^2 + y^2))^{2k}}{1 + (x^2 + y^2)^{2k}}$$

i) Prove que as funções  $f_k$  são integráveis em  $\mathbb{R}^2$ .

ii) Calcule  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k$ . Justifique todos os cálculos.

18. Considere a função

$$f(t) = \int_0^t \sin(x) e^{-tx^2} dx$$

em que  $t > 0$ . Prove que  $f$  é diferenciável e escreva uma expressão para a derivada  $f'(t)$ .

19. Considere a função real de variável real  $F$  definida para  $t > 0$  por

$$F(t) = \int_t^\infty e^{-tx^2} dx$$

i) Verifique que  $F$  está bem definida e calcule o limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t)$ .

ii) verifique que  $F$  é diferenciável em todo o seu domínio e calcule uma expressão para a sua derivada.

20. Seja  $f(t) = \int_0^\pi \frac{\sin(ts)}{s} ds$  ( $t > 0$ )

- a) Justifique que  $f$  é diferenciável em  $]0, +\infty[$ .  
b) Calcule  $f'(t)$ .

21. Para cada  $t > 0$ , seja  $F(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+x^2} dx$ .

- a) Mostre que  $F$  está bem definida.  
b) Mostre que se verifica a relação:  $F''(t) + F(t) = 1/t$ .

22. Mostre que, para cada  $t > 0$ , se tem:  $\ln t = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$