Análise Matemática III
Exercícios

Teorema de Stokes

1 Encontre um campo vectorial $f(x, y, z)$ cujo rotacional seja $\text{rot} f(x, y, z) = (2, 1, 3)$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule a circulação, no sentido que preferir, de f ao longo da circunferência de raio 1 no plano xy centrada na origem:

a) Directamente.

b) Através do teorema de Stokes.

2 Considere o cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ 0 < z < 2\}.$$

Usando o teorema de Stokes calcule o fluxo do campo $f(x, y, z) = (x, y, -2z)$ através de C no sentido da normal exterior.

3 Usando o teorema de Stokes calcule a circulação do campo vectorial $g(x, y, z) = (2yz, 0, xy)$ ao longo da fronteira da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,\ 0 \leq z < 1\},$$

segundo um sentido escolhido por si.

4 Considere a circunferência C inscrita no triângulo de vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule a circulação de $f(x, y, z) = (2y, 0, y - x)$ ao longo de C usando o teorema de Stokes.

5 Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ -1 < z\},$$

e o campo vectorial $f(x, y, z) = (y, -x, \text{arctg}(xyz))$.

a) Aplicando o teorema de Stokes a S, calcule o fluxo de $\text{rot} f(x, y, z)$ através de S no sentido na normal exterior.

b) Usando o resultado da alínea a) calcule o fluxo de $\text{rot} f(x, y, z)$ através do disco

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

no sentido da normal cuja componente segundo os z é negativa.

6 Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 = x^2 + y^2,\ 1 < z < 2\}.$$

Calcule o trabalho da força $f(x,y,z) = (-2y, 2x, 3z^2)$ ao longo do bordo inferior de M no sentido que preferir, usando o teorema de Stokes.

7 Considere a superfície

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ 1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 2\},$$

onde $a, b > 0$. Considere o campo vectorial $f(x,y,z) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$. Mostre que o teorema de Stokes aplicado a f em A é o teorema de Green aplicado à mesma região no plano xy e ao campo vectorial $g(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ em $\mathbb{R}^2$.

8 Considere o caminho fechado

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 7,\ z = 3\}.$$

a) Escolha um sentido para percorrer C e utilizando o teorema de Stokes calcule o trabalho do campo vectorial $f(x,y,z) = (\frac{x}{z-4}, \frac{y}{z-4}, 0)$ ao longo de C segundo esse sentido.

b) Será o campo vectorial f da alínea anterior um gradiante no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4\}$? Justifique.

9 Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \mathrm{sen}(x^2 + y^2 - \frac{\pi}{2}),\ \frac{\pi}{2} < x^2 + y^2 < \frac{3\pi}{2}\},$$

e o campo vectorial $f(x,y,z) = (-y + z^2, x + z^2, z\cos^2(x^2 + y^2))$.

Calcule o fluxo de $\mathrm{rot} f$ através de S no sentido da normal unitária a S cuja componente segundo os z é não-negativa.

10 Considere a superfície

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2(x^2 + y^2),\ \frac{1}{4} < z < 2,\ x < \frac{1}{2}\}.$$

Seja $h(x,y,z) = (3y, -3x, y\sqrt{\frac{1}{2} + 2y^2})$.

Calcule o fluxo de $\mathrm{rot} h$ através de M no sentido da normal unitária com componente segundo os z não-positiva.