

# Análise Matemática III

## Exercícios

### Teorema da Divergência

1 Considere o cubo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Seja  $S$  a fronteira de  $V$  e  $n$  a normal exterior unitária a  $S$ . Considere o campo vectorial  $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ . Calcule  $\int_S f \cdot n$  directamente e também usando o teorema da divergência.

2 Seja  $V$  o sólido limitado pelo plano  $z = 3$  e pela parte inferior da esfera de raio 5 centrada na origem em  $\mathbb{R}^3$ . A fronteira de  $V$  é então formada por uma componente esférica  $S_1$  e por uma componente plana  $S_2$ . Sendo  $n = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$  a normal exterior unitária à fronteira de  $V$ , calcule  $\int_S (xz \cos(\alpha) + yz \cos(\beta) + \cos(\gamma))$ , onde

- a)  $S$  é  $S_1$ .
- b)  $S$  é  $S_2$ .
- c)  $S$  é  $S_1 \cup S_2$ .

Resolva c) usando a) e b) e também através do teorema da divergência.

3 Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^5}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^5}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^5} \right).$$

Calcule  $\int_V \operatorname{div}(f)$  onde  $V$  é definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\}.$$

4 Seja  $S$  uma superfície fechada e regular que limita um volume  $V$  em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $f$  um campo vectorial com segundas derivadas contínuas no fecho de  $V$ .

Mostre que o fluxo de  $\operatorname{rot}(f)$  através de  $S$  é zero.

5 Considere o cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3, -1 < z < 1\}.$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo dos campos vectoriais seguintes através de  $C$  no sentido da normal exterior ao cilindro  $C$ :

- a)  $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2 - 1)$ .
- b)  $g(x, y, z) = (x^2, y^2, z - 1)$ .

**6** Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2(x^2 + y^2), -2 < z \leq 0\}.$$

Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo de  $f(x, y, z) = (x, y, z)$  através de  $S$ , segundo a normal cuja componente segundo os  $z$  é negativa.

**7** Encontre um campo vectorial em  $\mathbb{R}^3$  cuja divergência seja constante. Use-o em conjunto com o teorema da divergência para calcular o volume de uma região de  $\mathbb{R}^3$  limitada por:

- a) Uma superfície esférica de raio  $a$ .
- b) Um cilindro vertical de raio  $b$  e altura  $h$ .
- c) Um cone  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z < 1\}$ .

**8** Calcule o fluxo de campo vectorial  $f(x, y, z) = (x, y, z)$  através do elipsóide definido por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , segundo a normal exterior unitária.

- a) Directamente.
- b) Usando o teorema da divergência.

**9** Considere o campo vectorial  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$f(x, y, z) = (xg(z), -yg(z), z)$$

em que  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função de classe  $C^1$ .

- a) Fixe uma normal ao cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, 0 < z < 1\}$$

e use o teorema da divergência para provar que o fluxo de  $f$  através de  $S$ , segundo essa normal, não depende de  $g$ .

- b) Mostre que  $f$  é um campo gradiente se e só se  $g$  for uma função constante.

**10** Usando o teorema da divergência calcule o fluxo do campo  $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$  através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y^2 + z^2) = x, 1 < x < 2\},$$

no sentido da normal unitária com componente segundo os  $x$  negativa.