Análise Matemática III
Exercícios

Aplicações dos Teoremas da Divergência e Stokes

1 Demonstre a Lei de Gauss do electromagnetismo:

Como o campo eléctrico E e a densidade de carga eléctrica ρ satisfazem a primeira equação de Maxwell em $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{div}E = \rho$, então o fluxo do campo eléctrico E para fora de uma superfície regular fechada e limitada é igual à carga eléctrica total contida no volume limitado por essa superfície.

(nota: as constantes físicas foram postas igual a 1.)

2 Demonstre a Lei de Ampère da magnetoestática (todos os campos se assumem estacionários, i.e. independentes do tempo):

Como o campo magnético B e a densidade de corrente eléctrica (por unidade de volume) J satisfazem a quarta equação de Maxwell em $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{rot}B = J$, então a circulação de B ao longo de um caminho regular fechado γ que limita uma superfície regular S é igual ao fluxo da densidade de corrente eléctrica J através de S.

(nota: as constantes físicas foram postas igual a 1.)

3 Seja ϕ um campo escalar C^2 e $f = (f_1, f_2, f_3)$ um campo vectorial C^2 em $\mathbb{R}^3$. Designa-se por Laplaciano de ϕ o campo escalar $\mathrm{lap}\,\phi = \mathrm{div}(\nabla\phi)$.

a) Mostre que
$$\mathrm{lap}\,\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

b) Mostre que $\mathrm{div}(\phi f) = \nabla\phi \cdot f + \phi\,\mathrm{div}(f)$.

c) Mostre que $\mathrm{div}(\mathrm{rot}f) = 0$.

d) Mostre que $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}f) = \nabla(\mathrm{div}f) - (\mathrm{lap}f_1, \mathrm{lap}f_2, \mathrm{lap}f_3)$.

4 Seja V um aberto em $\mathbb{R}^3$ limitado por uma superfíe fechada regular S com normal exterior unitária n. Sejam f, g campos escalares C^2 em $\mathbb{R}^3$. Mostre que:

a) $\int_S \nabla f \cdot n = \int_V \mathrm{lap}\,f$.

b) $\int_S (f\nabla g \cdot n) - \int_S (g\nabla f \cdot n) = \int_V (f\,\mathrm{lap}\,g - g\,\mathrm{lap}\,f)$.

5 Um campo escalar f, de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$, diz-se harmónico se $\mathrm{lap}f = 0$. Sejam V, S e n como no exercício anterior. Sejam f e g campos escalares harmónicos. Mostre que:

a) $\int_S \nabla f \cdot n = 0$.

b) $\int_S f\nabla g \cdot n = \int_S g\nabla f \cdot n$.

c) $\int_S f\nabla f \cdot n = \int_V \nabla f \cdot \nabla f$.

6 Este exercício trata de um exemplo de lei de conservação. As leis de conservção são importantes na mecânica, mecânica dos fluídos, electromagnetismo, etc.

Considere em $\mathbb{R}^3$ a densidade de massa de um fluído (por unidade de volume) $\rho(t, x, y, z)$ onde a variável t é o tempo. Considere a densidade de corrente $J(t, x, y, z)$. Estas duas grandezas satisfazem uma equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} J = 0.$$

Mostre que a equação de continuidade anterior representa a lei de conservação da massa do fluído:

"Se S é uma superfície fechada e regular que limita uma região V, então o fluxo de J através de S para o exterior de V é igual à derivada no tempo da massa total de fluído contida em V."

Sugestão: Pode assumir a regra de Leibnitz: se $f(t) = \int_V g(t, x, y, z) dxdydz$ então $f'(t) = \int_V \frac{\partial g(t,x,y,z)}{\partial t} dxdydz$. A regra de Leibnitz vai ser estudada em detalhe e justificada mais à frente no semestre nos Complementos de Cálculo Integral.