Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

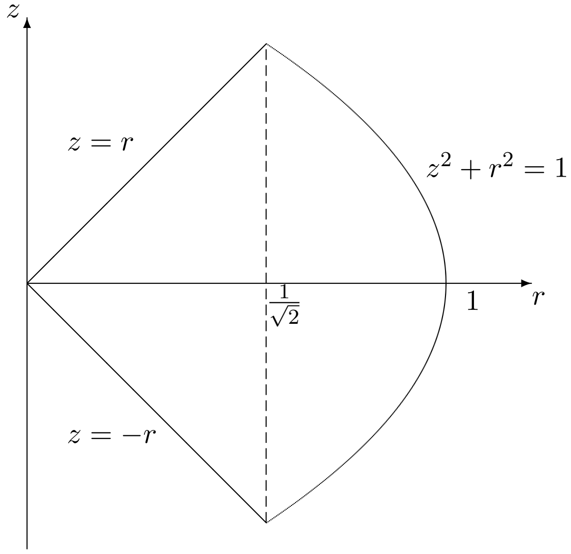
Análise Matemática III

Resolução do 2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 9 horas

1. O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oz. A expressão de S em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é:

$$r^2 + z^2 \leq 1;\ r^2 \geq z^2 \Leftrightarrow r \geq |z|$$

portanto S é o sólido que se obtem rodando a seguinte figura em torno do eixo Oz:



a) Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), o sólido escreve-se

$$r^2 \leq 1;\ r^2 \mathrm{sen}^2\phi \geq r^2 \cos^2\phi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$$

portanto uma expressão para o volume em coordenadas esféricas é dada por:

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \mathrm{sen}\phi \, dr d\phi d\theta$$

b) Tendo em conta a figura acima, a expressão para o volume em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-r}^{r} r \, dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \, dz dr d\theta$$

c) A massa é dada pelo integral de volume da densidade de massa. Vamos usar coordenadas esféricas porque são as coordenadas em que o volume se expressa de forma mais simples. Como $z = r\cos\phi$ temos

$$\begin{aligned}\int_S z^2 &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 r^2\cos^2\phi r^2 \text{sen}\phi\, dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 r^4 dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{sen}\phi\cos^2\phi d\phi \\ &= 2\pi\frac{1}{5}\left[-\frac{cos^3\phi}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

2. Uma vez que $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, a expressão da função integranda e da região de integração sugerem a mudança de variáveis linear

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y\end{cases}$$

Esta transformação $g(x,y) = (x+y, x-y)$ é de facto uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$: o determinante da matriz que representa a transformação é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Portanto g é bijectiva. Como g é igual à sua derivada Dg, é C^1 e tem derivada injectiva. Portanto é uma transformação de coordenadas. O jacobiano da transformação inversa é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2}$$

e nas novas coordenadas (u,v) a região A escreve-se

$$\begin{aligned} x+y<1 &\Leftrightarrow u<1 \\ y>0 &\Leftrightarrow \frac{u-v}{2} > 0 \Leftrightarrow u > v \\ y<x \Leftrightarrow x-y>0 &\Leftrightarrow v>0\end{aligned}$$

Pelo teorema de mudança de variáveis, temos[1]

$$\begin{aligned}\int_A e^{-(x+y)^4}(x^2-y^2)dxdy &= \int_0^1\int_0^u e^{-u^4}uv\frac{1}{2}dvdu \\ &= \int_0^1 \frac{u^3}{4}e^{-u^4}du = \left[-\frac{1}{16}e^{-u^4}\right]_0^1 = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

[1]Note que a escolha da ordem de integração nas novas variáveis é importante. Na outra ordem não se consegue calcular o integral.

3. Seja L a recta com equação cartesiana $x + y = 4$. Temos de achar o mínimo sobre E da função $d(x, y) =$ "distância de (x, y) à recta L" . A distância à recta é medida sobre a recta perpendicular a L que passa pelo ponto (x, y). Esta recta tem equação paramétrica

$$(x, y) + t(1, 1),\ t \in \mathbb{R}$$

(já que $(1, 1)$ é um vector perpendicular a L). O ponto de intersecção com a recta L corresponde ao parâmetro t tal que

$$x + t + y + t = 4 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2}(x + y)$$

A distância de (x, y) a L é o comprimento do vector $t(1, 1)$ para esse valor do parâmetro t, isto é

$$||(2 - \frac{1}{2}(x + y), 2 - \frac{1}{2}(x + y))|| = \sqrt{2}|2 - \frac{1}{2}(x + y)|$$

Uma vez que sobre E (uma elipse com semieixos de comprimento $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$) temos $2 - \frac{1}{2}(x + y) > 0 \Leftrightarrow x + y < 4$, a expressão de $d(x, y)$ sobre E é

$$d(x, y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

Para minimizarmos esta função sobre E usamos o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x, y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) - \lambda(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1)$. Então um ponto de mínimo de d sobre E tem de ser solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - x\lambda = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}y\lambda = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \\ y = -\frac{3}{2\sqrt{2}\lambda} \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right)\frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{array} \right.$$

onde usámos o facto de que λ não se pode anular devido às duas primeiras equações do sistema. Este sistema tem soluções

$$(x, y, \lambda) = \pm \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \right)$$

Como d é uma função contínua e E é compacto, pelo teorema de Weierstrass d tem máximo e mínimo em E e pelo método dos multiplicadores de Lagrange estes têm de ser atingidos nos pontos

$$(x, y) = \pm \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

Como $d(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{10}}$ e $d(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}) = 2\sqrt{2} - \frac{5}{\sqrt{10}}$ concluímos que o ponto de E mais próximo de L é o ponto

$$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$$

4. a) Seja $F(x,y,z) = z - \cos(x^2+y^2)$. Então M é definida pela equação cartesiana $F(x,y,z) = 0$ portanto um vector normal a M no ponto $(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)$ é dado por $\nabla F(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)$. Ora

$$\nabla F(x,y,z) = (2x\mathrm{sen}(x^2+y^2), 2y\mathrm{sen}(x^2+y^2), 1)$$

portanto

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)}M^{\perp} = \{t(\sqrt{2\pi},0,1) : t \in \mathbb{R}\}$$

e o espaço tangente é o complemento ortogonal deste, isto é

$$T_{(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0,0)}M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2\pi}x + z = 0\}$$

b) M é um pedaço do gráfico da função $\cos(x^2+y^2)$ portanto uma parametrização para M é dada por

$$g(x,y) = (x,y,\cos(x^2+y^2));\ x^2+y^2 < \pi$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x\mathrm{sen}(x^2+y^2) \\ 0 & 1 & -2y\mathrm{sen}(x^2+y^2) \end{vmatrix} \\ &= (2x\mathrm{sen}(x^2+y^2), 2y\mathrm{sen}(x^2+y^2), 1) \end{aligned}$$

Portanto uma expressão para a área de M é dada por

$$\begin{aligned} \int_M 1 &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} ||\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}||\, dydx \\ &= \int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{\pi-x^2}}^{\sqrt{\pi-x^2}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)\mathrm{sen}^2(x^2+y^2)}dxdy \end{aligned}$$

5. a) Podemos aplicar o teorema da divergência ao volume

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ y > 0\}$$

A fronteira de V é $\partial V = S \cup D$ onde D é a "tampa"

$$D = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1\}$$

Como a normal a S dada é a normal interior a V, e a normal a D unitária exterior a V é $(0,-1,0)$, o teorema da divergência diz que

$$\int_V \mathrm{div}F = -\int_S F.n + \int_D F.(0,-1,0)$$

isto é

$$\int_S F.n = \int_D -yz^2 - \int_V z^2$$

O primeiro termo é 0 porque a função integranda é constante igual a 0 em D. Para calcular o segundo termo podemos usar coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
\int_V z^2 &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\phi\, r^2 \mathrm{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \\
&= \pi\int_0^{\pi}\frac{1}{5}\mathrm{sen}\phi\cos^2\phi\, d\phi \\
&= \frac{2\pi}{15}
\end{aligned}$$

A conclusão é que o fluxo de F através de S no sentido indicado é

$$\int_S F.n = -\frac{2\pi}{15}$$

b) Para calcular o fluxo de rot$G$ podemos usar o teorema de Stokes. Este teorema diz que

$$\int_S \mathrm{rot}G.n = \oint_{\partial S} G$$

onde ∂S é percorrida no sentido dado pela regra da mão direita. O bordo de S é a circunferência

$$\partial S = \{(x,0,z) : x^2+z^2 = 1\}$$

e a regra da mão direita aplicada à normal n diz que ∂S deve ser percorrida no sentido que visto do eixo negativo dos y é contrário ao dos ponteiros do relógio. Assim uma parametrização para ∂S é dada por

$$g(t) = (\cos t, 0, \mathrm{sen}t),\ 0 < t < 2\pi$$

e

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} G &= \int_0^{2\pi}(-\alpha\mathrm{sen}t + \cos t, \sqrt{\alpha}, \alpha\cos t + \mathrm{sen}t).(-\mathrm{sen}t, \cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi}\alpha dt \\
&= 2\pi\alpha
\end{aligned}$$

Concluímos que para que o fluxo de rot$G$ seja igual a 10π é necessário que $\alpha = 5$.

6. a) Seja $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-5\sqrt{x}}$.

Há duas razões porque não podemos calcular directamente o integral de f. Uma é que a região de integração é ilimitada e a outra é que a função f não é limitada numa vizinhança de 0. Assim vamos usar o teorema da convergência monótona para escrever o integral

como o limite de uma sucessão de integrais que podemos calcular directamente.
Seja $f_k :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ a sucessão de funções definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então para todo o k, f_k é integrável em $[0, +\infty[$ porque

$$\int_0^{+\infty} f_k = \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx$$

é o integral de uma função contínua num intervalo compacto.
Como a função f é positiva, a sucessão de funções f_k é crescente (isto é, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo o $x \in [0, +\infty[$).
Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx &= -\frac{2}{5} \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{5}{2\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx \\ &= -\frac{2}{5} e^{-5\sqrt{x}} \Big|_{\frac{1}{k}}^{k} \\ &= \frac{2}{5} \left(e^{-\frac{5}{\sqrt{k}}} - e^{-5\sqrt{k}} \right) \end{aligned}$$

Portanto a sucessão dos integrais $\int_0^{+\infty} f_k$ é limitada, (converge para $\frac{2}{5}$).
Como $f_k(x) \to f(x)$ para todo o $x \in]0, +\infty[$ quando k tende para ∞, o teorema da convergência monótona garante que f é integrável em $]0, +\infty[$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-5\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}$$

b) A função f decresce para 0 como $\frac{1}{x}$ quando x tende para infinito portanto não é integrável. Para justificar esta afirmação rigorosamente podemos notar que, como a função f é positiva, se o integral existir teremos para todo o número natural k

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx > \int_0^{k} \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)|_0^k = \log(k+1)$$

Como não existe nenhum número real que verifique estas condições para todo o k concluímos que o integral não existe.