

Análise Matemática III - 2S - 99/00
 2º Teste / 1º Exame - 26.06.2000
 Resolução

1. Dado que, para $|x| \leq 1$, temos $|x^3| \leq |x|$, então

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(A) &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{|x^3|}^{|x|} dy \right) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(\int_{-x^3}^{-x} dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x dy \right) dx \end{aligned}$$

2. a) O sólido V é limitado pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e pelo cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, temos

$$V = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

A esfera e o cone intersectam-se segundo a linha dada pelas equações

$$z = \sqrt{2}; x^2 + y^2 = 2$$

e, portanto, na direcção z o sólido V apresenta duas regiões distintas:

i) Fixando z no intervalo $[0, \sqrt{2}]$, obtemos o quarto de círculo em xy , de raio z e definido por

$$\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, x \geq 0, y \geq 0\}$$

ii) Fixando z no intervalo $[\sqrt{2}, 2]$, obtemos o quarto de círculo em xy , de raio $\sqrt{4 - z^2}$ e definido por

$$\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{4 - z^2}, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4 - z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{4 - z^2 - y^2}} dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

b) Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , V é dado por

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}; \rho \cos \theta \geq 0; \rho \sin \theta \geq 0$$

e, tendo em conta que a esfera e o cone se intersectam para $z = \sqrt{2}; \rho^2 = 2$, temos

$$\rho \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$$

Assim, o volume de V é dado por

$$\text{vol}_3(V) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\rho}^{\sqrt{4 - \rho^2}} \rho dz \right) d\rho \right) d\theta$$

c) Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , temos

$$r \leq 2; r \cos \phi \geq r \sin \phi; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ou seja

$$r \leq 2; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r^2 \sin \phi dr \right) d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

3. Consideremos a transformação linear $(u, v) = g(x, y)$ definida por

$$\begin{aligned} u &= x + y \\ v &= x - 2y \end{aligned}$$

Sendo linear, para que g seja uma transformação de coordenadas basta que a matriz que a representa seja não singular. (Recorde-se que para uma transformação linear a matriz que a representa e a sua derivada coincidem). Assim, g é uma transformação de coordenadas porque

$$\det Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Seja $T = g(S)$, ou seja, a imagem de S através da transformação g . Da definição de S , obtemos

$$T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi; 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Assim, temos,

$$\begin{aligned} \int \int_S \sin(x + y) \cos(x - 2y) dx dy &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \cos(v) dv \right) du \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{\pi} \sin(u) du \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v) dv \right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. a) Devido à simetria cilíndrica, M pode ser parametrizada pela seguinte função

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^3); 0 < \rho < 2; 0 < \theta < 2\pi$$

donde se conclui que

$$g(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = (1, 1, \sqrt{8})$$

O espaço tangente no ponto $(1, 1, \sqrt{8})$ é gerado pelas colunas da matriz derivada $Dg(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Assim, dado que

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \theta \\ 3\rho^2 & 0 \end{bmatrix}$$

temos

$$Dg(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o espaço tangente a M no ponto $(1, 1, \sqrt{8})$ é gerado pelos vectores

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6\right); (-1, 1, 0)$$

ou, equivalentemente, pelos vectores

$$(1, 1, 6\sqrt{2}); (-1, 1, 0)$$

- b) Usando a parametrização da alínea anterior, a área de M é dada por

$$\operatorname{vol}_2(M) = \int \int_T \sqrt{\det Dg^t Dg} d\rho d\theta$$

em que $T =]0, 2\pi[\times]0, 2[$ e Dg^t designa a transposta da matriz Dg .
Da alínea anterior, obtemos

$$Dg^t Dg = \begin{bmatrix} 1 + 9\rho^4 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\operatorname{vol}_2(M) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \rho \sqrt{1 + 9\rho^4} d\rho \right) d\theta$$

- c) Sendo M dada por uma parametrização, trata-se de uma superfície orientável e, assim, podemos usar o teorema de Stokes para calcular o fluxo de $\operatorname{rot} f$ através de M segundo a normal com terceira componente negativa.

Da definição de M , a respectiva fronteira ou bordo é a circunferência definida por

$$\partial M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4; z = 8\}$$

Assim, temos

$$\int \int_M \operatorname{rot} f \cdot \nu = \int_{\partial M} f \cdot d\gamma$$

em que γ é o caminho que descreve ∂M no sentido negativo para que seja compatível com a orientação de M induzida pela normal ν que tem terceira componente negativa. Portanto,

$$\gamma(t) = (2 \cos t, -2 \operatorname{sen} t, 8); 0 \leq t \leq 2\pi$$

e temos

$$\begin{aligned} \int \int_M \operatorname{rot} f \cdot \nu &= \int_{\partial M} f \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (16 \operatorname{sen} t, 16 \cos t, -64 \cos^3 t \operatorname{sen}^3 t) \cdot (-2 \operatorname{sen} t, -2 \cos t, 0) dt \\ &= -64\pi \end{aligned}$$

d) Da alínea anterior, o integral de linha de f ao longo de ∂M não é nulo. Sendo ∂M uma linha fechada, concluímos que o campo f não é um gradiente.

5. Vamos aplicar o teorema da divergência ao campo h e à pirâmide P

$$\int \int \int_P \operatorname{div} h = \int \int_{\partial P} h \cdot \nu$$

em que ν designa a normal unitária e exterior a P .

A pirâmide P é limitada pelas seguintes superfícies planas

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : x + y + z = 1 ; 0 < x < 1 ; x + y < 1\} \\ P_z &= \{(x, y, z) : z = 0 ; 0 < x < 1 ; x + y < 1\} \\ P_x &= \{(x, y, z) : x = 0 ; 0 < y < 1 ; y + z < 1\} \\ P_y &= \{(x, y, z) : y = 0 ; 0 < x < 1 ; x + z < 1\} \end{aligned}$$

e pretende-se calcular o fluxo de h através de S segundo a normal exterior a P .

Dado que

$$\operatorname{div} h = 0$$

obtemos

$$\int \int_S h \cdot \nu = - \int \int_{P_z} h \cdot \nu_z - \int \int_{P_x} h \cdot \nu_x - \int \int_{P_y} h \cdot \nu_y$$

em que ν_z, ν_x, ν_y designam, respectivamente, as normais unitárias e exteriores aos planos P_z, P_x, P_y , ou seja

$$\begin{aligned} \nu_z &= (0, 0, -1) \\ \nu_x &= (-1, 0, 0) \\ \nu_y &= (0, -1, 0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h \cdot \nu_z &= 0 \\ h \cdot \nu_y &= 0 \\ h \cdot \nu_x &= 3 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \int_S h \cdot \nu = 3 \operatorname{vol}_2(S) = \frac{3}{2}$$

6. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Sendo a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, consideremos os pontos estacionários da função

$$g(x, y) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

sobre a circunferência dados pelo sistema

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0 \\ -1 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Da primeira e da segunda equações, obtemos

$$y = -x$$

e, da terceira obtemos os pontos estacionários

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Sendo

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\sqrt{2} \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

concluimos que o ponto de máximo é dado por

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

7. Dado que f é uma função contínua no intervalo $I =]0, \infty[$, é integrável em qualquer intervalo compacto $[a, b] \subset]0, \infty[$. Assim, consideremos a sucessão de funções (f_k) , $k = 1, 2, \dots$ definidas por

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } \frac{1}{k} \leq x \leq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então,

- i) A sucessão (f_k) é crescente porque $f > 0$.
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ qtp.
- iii) A sucessão de integrais $(\int_I f_k)$ é convergente. De facto, temos

$$\int_I f_k = \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = 2(e^{-\frac{1}{k}} - e^{-k}) \rightarrow 2$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluimos que f é integrável em I e

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k = 2$$