Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 23 de Abril de 2005 - 11h

Resolução

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y \leq z \leq 2\,;\, x + y \leq 1\,;\, x \geq 0\,;\, y \geq 0\}.$$

(2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

(2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

(2) c) Calcule $\displaystyle\int_V \frac{1}{2-x-y}$.

RESOLUÇÃO:

(a) Da definição de V, fixando x no intervalo $[0, 1]$, vem imediatamente

$$x + y \leq z \leq 2\,;\, 0 \leq y \leq 1 - x.$$

Portanto,

$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_{x+y}^2 dz\right) dy\right) dx$$

(b) Da definição de V, fixando z no intervalo $[0, 2]$, obtemos

$$x + y \leq z\,;\, x + y \leq 1$$

e, portanto, devemos considerar dois casos.
Se $0 \leq z \leq 1$, então teremos $x + y \leq z$. Se $1 \leq z \leq 2$, então $x + y \leq 1$.
Assim, o volume será dado pela soma de dois integrais iterados

$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{z-y} dx\right) dy\right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} dx\right) dy\right) dz$$

(c) Note-se que a função integranda não depende de z. Por outro lado os extremos de integração em z para o integral iterado da forma $\int\int\int dzdydx$ são 2 e $x + y$. Portanto, será mais vantajoso usar esta ordem de integração e teremos

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{1}{2-x-y} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_{x+y}^2 \frac{1}{2-x-y}\, dz\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\, dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Considere o sólido

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\,;\, 1 \leq x^2+y^2\,;\, y \geq 0\}.$$

(4) Calcule a massa de A sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$.

RESOLUÇÃO:

O sólido é constituído pelos pontos interiores à esfera de raio 2 e exteriores ao cilindro de raio 1. Temos então,

$$M(A) = \int_0^{\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{+\sqrt{4-\rho^2}} \rho\sqrt{4-\rho^2} dz \right) d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_1^2 \rho(4-\rho^2) d\rho = \frac{9\pi}{2}.$$

Note que $0 < \theta < \pi$ pois tem-se $y > 0$.

Alternativamente, podemos também escrever,

$$M(A) = \int_0^{\pi} \left(\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \left(\int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho\sqrt{4-\rho^2} d\rho \right) dz \right) d\theta.$$

3. Considere os campos vectoriais F e H definidos por

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (yz^2, xz^2, 2xyz) \\ H(x,y,z) &= \left(-\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+4y^2}, 0 \right). \end{aligned}$$

(2) a) Mostre que F é um gradiente no seu domínio e calcule $\int_C F \cdot dg$, onde C é a curva descrita pelo caminho $g(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$, com $t \in [0, \pi/4]$.

(2) b) Usando a definição, calcule o integral de linha de H ao longo da elipse $(x-1)^2+4y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto $(1,0,5)$.

(3) c) Calcule $\int (F+H) \cdot d\alpha$ onde α é o caminho fechado que descreve a linha quadrada no plano $z = 0$ que une os pontos $(0,-1,0), (2,-1,0), (2,1,0), (0,1,0)$ e percorrida por esta ordem.

RESOLUÇÃO:

(a) O domínio de F é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto simplesmente conexo, logo para mostrar que F é um gradiente basta mostrar que é fechado:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = 2yz = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = z^2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 2xz = \frac{\partial F_3}{\partial y}.$$

Para calcular o integral de linha de F ao longo de C podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo, usando o potencial $\phi(x,y,z) = xyz^2$. Assim obtemos

$$\int_c F \cdot dg = \int_c \nabla\phi \cdot dg = \phi(g(\pi/4)) - \phi(g(0)) = \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, e^{\pi/4}\right) - \phi(1,0,1) = \frac{e^{\pi/2}}{2}.$$

(b) Uma parametrização da elipse é dada por

$$h(t) = \left(1 + \cos t, \frac{\mathrm{sen} t}{2}, 0\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Usando a definição para integrais de linha de campos vectoriais temos

$$\begin{aligned} \int_E H \cdot dh &= \int_0^{2\pi} H(h(t)) \cdot h'(t)\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\mathrm{sen} t}{2}, \cos t, 0\right) \cdot \left(-\mathrm{sen} t, \frac{\cos t}{2}, o\right)\, dt = \pi. \end{aligned}$$

(c) Por linearidade temos

$$\int (F + H) \cdot d\alpha = \int F \cdot d\alpha + \int H \cdot d\alpha.$$

O primeiro integral é zero, pois F é um campo gradiente e o caminho α é fechado. Para o segundo integral notamos que o campo H é fechado, e o losango e a elipse da alínea anterior são curvas fechadas e homotópicas no domínio deste campo, portanto podemos concluir que

$$\int H \cdot d\alpha = \int_E H \cdot\, dh = \pi.$$

Por fim obtemos

$$\int (F + H) \cdot d\alpha = \pi.$$

(3) 4. Considere o conjunto

$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}.$$

Mostre que para qualquer função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, se tem

$$\int_U f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^1 f(t) dt\right]^n.$$

RESOLUÇÃO:

Dado uma função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, defina-se $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int_t^1 f(x)\, dx. \tag{1}$$

Obtém-se $F(0) = \int_0^1 f(t)\, dt$, $F(1) = 0$, e, pelo teorema fundamental de cálculo,

$$F'(t) = -f(t). \tag{2}$$

Dado um inteiro $n \geq 1$ e um ponto $t \in [0, 1]$ designe-se

$$U_n(t) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : t \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}. \tag{3}$$

Tem-se então da equação (1) que $\int_{U_1(t)} f(x_1)\,dx_1 = F(t)$. Aplicando o teorema de Fubini, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_{U_2(t)} f(x_1)f(x_2) &= \int_t^1\!\!\int_{x_1}^1 f(x_1)f(x_2)\,dx_2dx_1 \\
&= \int_t^1 f(x_1)F(x_1)\,dx_1 \\
&= -\int_t^1 F'(x_1)F(x_1)\,dx_1, && \text{da equação (2),} \\
&= -\int_t^1 \frac{d}{dx_1}\frac{F(x_1)^2}{2}\,dx_1 \\
&= \frac{F(t)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ora seja $n > 2$ e suponha por indução que

$$\int_{U_{n-1}(t)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{n-1}) = \frac{F(t)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{4}$$

Segue-se

$$\begin{aligned}
\int_{U_n(t)} f(x_1)\cdots f(x_n) &= \int_t^1 \left(\int_{U_{n-1}(x_1)} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\right) dx_1 \\
&= \int_t^1 f(x_1)\frac{F(x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx_1 \\
&= -\int_t^1 F'(x_1)\frac{F(x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dx_1 \\
&= -\int_t^1 \frac{d}{dx_1}\frac{F(x_1)^n}{n!}\,dx_1 \\
&= \frac{F(t)^n}{n!}, \quad \text{e} \\
\int_{U_n(0)} f(x_1)\cdots f(x_n) &= \frac{1}{n!}\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^n
\end{aligned}$$