Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 28 de Abril de 2001

1. Temos
$$A = \int_2^3 \left(\int_{8-x^2}^{x^2} dy \right) dx = \int_2^3 (2x^2 - 8) dx = 14/3.$$

2. a) O conjunto tem simetria cilíndrica em relação ao eixo dos z. Seja $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, como é habitual nas coordenadas cilíndricas. Fazendo um corte vertical, por exemplo segundo o plano $x=0$, observamos que o sólido é obtido por rotação em torno do eixo dos z, para $x, y \geq 0$, da região que está simultâneamente abaixo da recta $z = 1+\rho$ e acima da parábola $z = 2\rho^2$ que se intersectam para $\rho = 1$.
Temos assim,
$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z/2}} \left(\int_0^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz +$$
$$+ \int_1^2 \left(\int_0^{z-1} \left(\int_{\sqrt{(z-1)^2-y^2}}^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{z-1}^{\sqrt{z/2}} \left(\int_0^{\sqrt{(z/2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

b) Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos, pela alínea anterior,
$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_{2\rho^2}^{1+\rho} \left(\int_0^{\pi/2} \rho \, d\theta \right) dz \right) d\rho = \pi/6.$$

3. a) Consideremos a mudança de coordenadas dada por $(x,y) = g(u,v)$. A transformação g é de classe C^1 e é injectiva pois $(u,v) = g^{-1}(x,y) = (2x, y+4x^2)$. Temos também $|\det Dg| = 1/2 \neq 0$. Além disso, as condições que determinam S escritas em termos de u e v dão precisamente a região U.

b) Pelo teorema da mudança de coordenadas de integração temos então,
$$\int_S x e^{(y+4x)^2} dxdy = \int_U (u/2) e^{v^2} (1/2) dudv =$$
$$= (1/4) \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{v}} u e^{v^2} du \right) dv = (1/8) \int_0^4 v e^{v^2} dv = (1/16)(e^{16} - 1).$$

4. a) Temos

$$W = \int_0^1 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^1 (at^{2b+3c}, 2t^{1+b+3c}, 3t^{1+2b+2c}) \cdot (1, bt^{b-1}, ct^{c-1}) dt =$$

$$= \int_0^1 (a + 2b + 3c) t^{2b+3c} dt = \frac{a + 2b + 3c}{1 + 2b + 3c}.$$

b) Pela alínea a) vemos que com $a = 1$ temos sempre $W = 1$.

c) Temos com $b = c = 3/2$ que $g(t) = (t, t^{3/2}, t^{3/2})$. Logo $g'(t) = (1, (3/2)\sqrt{t}, (3/2)\sqrt{t})$ e $||g'(t)|| = \sqrt{1 + (9/2)t}$. Então o comprimento será

$$L_g = \int_0^1 \sqrt{1 + (9/2)t} dt = 4/27((1 + (9/2))^{3/2} - 1).$$

5. A função $g(x) = 1/\sqrt{x}$ é integrável em $]0, 3[$. Na verdade, esta função é uma função limite superior neste intervalo como facilmente se verifica (ver exercícios resolvidos na web). Por outro lado a função $h(x) = 1/\sqrt{3 - x}$ também é integrável em $]0, 3[$. De facto, $h(x)$ é simplesmente $g(x)$ mas após uma translação e reflexão $x \to 3 - x$. Facilmente se verifica que $h(x)$ também é função limite superior no intervalo $]0, 3[$. Mas então $f(x) = g(x) - 2h(x)$ é uma combinação linear de funções limite superior pelo que é integrável em $]0, 3[$. Note-se no entnto que f <u>não</u> é uma função limite superior já que é ilimitada inferiormente.