Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 9 DE NOVEMBRO DE 2002

Resolução

(1) Considere a seguinte região de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \, , \; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \, , \; \sin y \leq z \leq 1\} \, .$$

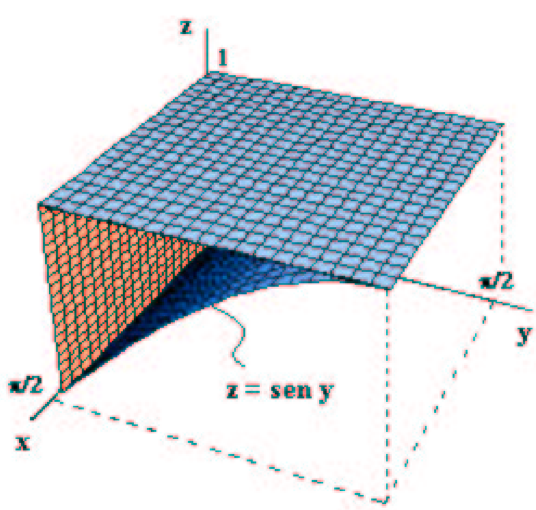
(3 val.) (a) Calcule o integral $\iiint_V 2z$.

(3 val.) (b) Escreva uma expressão para $\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \, .$$

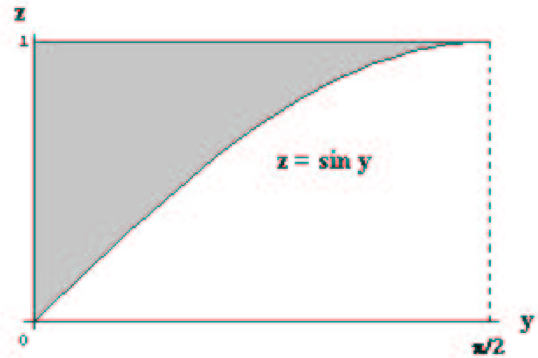
Resolução:

(a) A região V é constituída pelos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y) no quadrado $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ e com coordenada z entre a superfície $z = \sin y$ e o plano $z = 1$. Como esta superfície se obtém transladando o gráfico do seno (no plano yOz) ao longo do eixo Ox, obtemos o seguinte esboço:



Assim, o integral pedido pode ser calculado facilmente por um integral iterado na ordem $dz \; dy \; dx$.

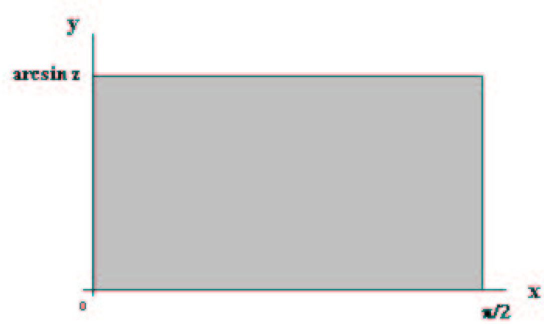
De facto, se fixarmos $x \in [0, \pi/2]$ obtemos como corte:



Donde:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 2z &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin y}^{1} 2z \; dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 y\right) dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2y) dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{2} \sin 2y \right) \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4} \; dx = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

(b) Para o integral iterado pedido, há que fixar primeiro a coordenada z. Do esboço acima é claro que se fixarmos $z \in [0, 1]$ obtemos como corte um rectângulo com $x \in [0, \pi/2]$ e com $y \in [0, \arcsin z]$:



Assim, o integral iterado escreve-se:

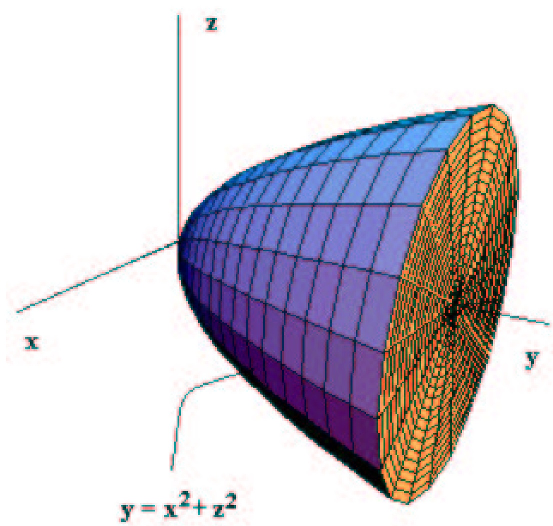
$$\iiint_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\arcsin z} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y, z) \; dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}$$

tem densidade de massa $f(x, y, z) = e^y$. Calcule a massa total do sólido.

Resolução: Observe que este sólido possui simetria rotacional em relação ao eixo Oy. De facto, B é a região entre a superfície de revolução $y = x^2 + z^2$ e o plano $y = 1$:



Assim, vamos utilizar uma transformação $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de coordenadas cilíndricas em relação ao eixo Oy:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= y \\ z &= \rho\sin\theta. \end{cases}$$

O determinante da matriz Jacobiana desta transformação é então

$$|\det(Dg(\rho, \theta, y))| = \rho$$

e nestas coordenadas a região é descrita por

$$g^{-1}(B) = \{(\rho, \theta, y) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \rho^2 \leq y \leq 1\}.$$

Assim, a massa total do sólido B é dada por

$$\begin{aligned}
M(B) &= \iiint_B e^y \, dx \, dy \, dz \\
&= \iiint_{g^{-1}(B)} \rho \, e^y \, dy \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^1 \rho \, e^y \, dy \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \left(e - e^{\rho^2} \right) d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (e\rho^2 - e^{\rho^2}) \right]_{\rho=0}^{\rho=1} dx \\
&= \pi(e - e + 1) = \pi.
\end{aligned}$$

(3) Considere os campos vectoriais seguintes:

$$F(x,y,z) = \left(2xze^{x^2+y}, ze^{x^2+y}, e^{x^2+y} \right) \quad \text{e} \quad G(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2}(-z, 0, x) \ .$$

(a) Calcule o trabalho de F ao longo do arco da hipérbole definida por $z = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$, desde o ponto $(1, 0, 1)$ até ao ponto $(\sqrt{2}, 1, 1)$. (3 val.)

(b) Calcule o trabalho de G ao longo da circunferência definida por $x^2 + z^2 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(0, -10, 0)$, e diga se G é ou não um gradiente no seu domínio. (3 val.)

(c) Calcule o trabalho de G ao longo da elipse definida por $x^2/10 + z^2/55 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando se observa de $(0, -10, 0)$. (2 val.)

Resolução:

(a) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2xze^{x^2+y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \\
\frac{\partial F_1}{\partial z} &= 2xe^{x^2+y} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\
\frac{\partial F_2}{\partial z} &= e^{x^2+y} = \frac{\partial F_3}{\partial y}
\end{aligned}$$

logo F é fechado. Uma vez que $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela conclui-se que F é um gradiente.

Um potencial ϕ para F obtém-se resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \phi}{\partial x} & = & 2xze^{x^2+y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & = & ze^{x^2+y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & e^{x^2+y} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \phi(x,y,z) & = & ze^{x^2+y} + C_1(y,z) \\ \phi(x,y,z) & = & ze^{x^2+y} + C_2(x,z) \\ \phi(x,y,z) & = & ze^{x^2+y} + C_3(x,y) \end{array} \right.$$

donde se conclui que um potencial para F é dado por

$$\phi(x,y,z) = ze^{x^2+y}.$$

Para calcular o trabalho realizado por F ao longo do arco de hipérbole Γ usamos o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha e obtemos

$$W = \int_\Gamma F \cdot \, dg = \phi(\sqrt{2}, 1, 1) - \phi(1,0,1) = e^3 - e.$$

(b) O campo G é de classe C^1 no seu domínio $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$. Uma parametrização para a circunferência $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x^2 + z^2 = 0\}$ no sentido indicado é dada por $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ com

$$g(\theta) = (\cos\theta, 0, \sin\theta).$$

Assim o trabalho realizado por G ao longo de C é dado por

$$\int_C G \cdot \, dg = \int_0^{2\pi} G(g(t)) \cdot g'(t) \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, 0, \cos\theta) \, d\theta = 2\pi.$$

O campo G não é um gradiente, porque o integral de G ao longo da curva regular e fechada C não é zero, ou seja, $\int_C G \cdot \, dg \neq 0$.

(c) Começamos por ver que o campo G é fechado pois

$$\frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{z^2 - x^2}{x^2 + z^2} = \frac{\partial G_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial G_3}{\partial y}.$$

A elipse E e a circunferência C da alínea anterior são caminhos homotópicos no domínio do campo G, logo, pela invariância de integrais de linha de campos fechados sobre caminhos fechados homotópicos, temos

$$\int_E G \cdot \, dh = \int_C G \cdot \, dg = 2\pi.$$

(3 val.) (4) Seja $A \subset [0,1]$ um conjunto da forma $A = \cup_{i=1}^{+\infty}]a_i, b_i[$ com $\sum_{i=1}^{+\infty}(b_i - a_i) < 1$ e tal que todos os racionais de $]0,1[$ pertencem a A. Mostre que a fronteira de A não tem medida nula.

Resolução:

Seja $I = [0,1]$ e ∂A a fronteira de A.

Vamos primeiro mostrar que $I \backslash A = \partial A$:

Considere-se $x \in I \backslash A$. Qualquer vizinhança de x contém um número racional de $]0,1[$ (qualquer intervalo aberto não vazio contém números racionais). Como o conjunto A contém todos os racionais de $]0,1[$, conclui-se que qualquer uma destas vizinhanças contém um ponto de A. Assim, qualquer vizinhança de x intersecta A e $I \backslash A$ (pois $x \in I \backslash A$), o que implica que $x \in \partial A$ e, consequentemente, $I \backslash A \subset \partial A$. Por outro lado, como A é um conjunto aberto, temos $\partial A \subset (I \backslash A)$, pelo que $\partial A = I \backslash A$.

Conclui-se assim que $[0,1] = A \cup (I \backslash A) = A \cup \partial A$.

Se ∂A tivesse medida nula, para qualquer $\varepsilon > 0$ existitiria uma colecção numerável de intervalos limitados $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$, tais que

$$A \subset \cup_{k=1}^{+\infty} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \text{vol}(I_k) < \varepsilon.$$

Considere-se $L = \sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) < 1$. Escolhendo $\varepsilon < 1 - L$, poder-se-ia considerar uma cobertura numerável de $[0,1]$, $\{U_j\}_{j=1}^{+\infty}$, formada pelos intervalos $\{\,]a_i, b_i[\, \}_{i=1}^{+\infty}$ (cobertura de A) e pelos intervalos $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (cobertura de ∂A). Teríamos então

$$1 = \text{vol}[0,1] \le \sum_{j=1}^{+\infty} \text{vol}(U_j) < L + \varepsilon < 1,$$

o que seria impossível.

Concluímos assim que a fronteira de A não tem medida nula.