Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 11 de Novembro de 00 - 9h00

1. a) O conjunto tem simetria cilíndrica em relação ao eixo dos z. Seja $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, como é habitual nas coordenadas cilíndricas. Fazendo um corte vertical, por exemplo segundo o plano $x=0$, observamos que o sólido é obtido por rotação em torno do eixo dos z, para $x, y \geq 0$, da região que está simultâneamente no interior da circunferência de raio 2 centrada na origem do plano ρz e no interior da circunferência de raio 2 centrada em $(2,0)$ no mesmo plano.
Essas duas circunferências intersectam-se no ponto $(1,\sqrt{3})$ do plano ρz, para $z \geq 0$. Para um z fixo entre 0 e $\sqrt{3}$, o corte horizontal correspondente projectado no plano xy consiste portanto na região com $x, y \geq 0$ compreendida entre as circunferências centradas na origem de raios $2-\sqrt{4-z^2}$ e $\sqrt{4-z^2}$. Temos assim,

$$Vol(V) = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2-\sqrt{4-z^2}} \left(\int_{\sqrt{(2-\sqrt{4-z^2})^2-y^2}}^{\sqrt{(4-z^2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz +$$

$$+ \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{(4-z^2)-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

b) Utilizando coordenadas cilíndricas obtemos, pela alínea anterior,

$$M = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{2-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{\pi/2} z\rho \, d\theta \right) d\rho \right) dz = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-z^2}-1) z dz = 5\pi/6.$$

2. Consideremos a mudança de coordenadas dada por $(u,v) = g(x,y) = (x+y, y-2x)$. A transformação g é de classe C^1 pois é linear e é injectiva pois $(x,y) = g^{-1}(u,v) = ((u-v)/3, (2u+v)/3)$. Temos também $\det Dg = 3$. Em termos das coordenadas (u,v) a região U é descrita por

$$g(U) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1,\ 1 < v < 2\}.$$

Pelo teorema da mudança de coordenadas de integração temos então,

$$\int_U \operatorname{sen}(x+y) e^{2x-y} dxdy = \int_{g(U)} \operatorname{sen}(u) e^{-v} \frac{1}{3} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \operatorname{sen}(u) du \int_1^2 e^{-v} dv = \frac{1}{3}(1-\cos(1))(e^{-1}-e^{-2}).$$

3. a) Facilmente se verifica que

$$\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1 = -xy/(x^2+y^2-4)^{3/2},$$

pelo que f é um campo vectorial fechado.

b) procuramos um campo escalar ϕ tal que $\nabla\phi = f$, ou seja $\partial_x\phi = f_1$ e $\partial_y\phi = f_2$. Integrando a primeira equação obtemos $\phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} + h(y)$. Substituindo na segunda equação obtemos $h = const.$, pelo que podemos tomar $\phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$. Esta função é de classe C^1 em S pelo que f é um gradiante nesse conjunto.

c) O caminho g está contido em S e une os pontos $(-1,4)$ e $(2,7)$. pelo teorema fundamental do cálculo temos $\int f dg = \int \nabla\phi dg = \phi(2,7) - \phi(-1,4) = 7 - \sqrt{13}$.

4. Seja $h(t)$, com $t \in [a,b]$, um caminho regular que parametriza a curva fechada C. Seja $(x,y) = G(u,v) = (f(u,v), g(u,v))$. A imagem $G(C)$ da curva C no plano xy será então parametrizada pelo caminho $G \circ h(t) = G(h(t)) = (f(h(t)), g(h(t)))$. Temos que $(G \circ h)'(t) = DG\, h'(t)$, onde DG é a matriz Jacobiana de G. Calculando o trabalho do campo vectorial $a(x,y) = (0,x)$ ao longo de $G \circ h(t)$ obtemos

$$W = \int a\, d(G\circ h) = \int_a^b (0, x(G\circ h(t)))\cdot(G\circ h)'(t)dt = \int_a^b (0, f(h(t)))\cdot(G\circ h)'(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(h(t))((\partial_u g)h_1' + (\partial_v g)h_2')(t)dt = \int_a^b (f\partial_u g, f\partial_v g)\cdot h'(t)dt = \int (f\partial_u g, f\partial_v g)dh,$$

que é o trabalho do campo $(f\partial_u g, f\partial_v g)$ ao longo de C como indicado na sugestão.

Podemos agora aplicar o teorema de Green a ambos os lados desta equação obtendo

$$\int\int_{G(R)} dxdy = \int\int_R (\partial_u f \partial_v g - \partial_v f \partial_u g)dudv = \int\int_R \det(DG)dudv,$$

como pretendíamos demonstrar.