Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 14 de Maio de 99 - 20h00

1. a) Designe-se por $A(S)$ a área de S.

$$A(S) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^x dy \right) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx$$

b)

$$I_{xx} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (xy)y^2 dx \right) dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} (\frac{y^3}{2} - y^5) dy = 1/32 - 1/48$$

2. Escolham-se coordenadas cilíndricas com o eixo em y: $x = \rho \cos\theta; z = \rho \sin\theta; y = y$. O Jacobiano da transformação de coordenadas é ρ. Temos $f(\rho, \theta, y) = y/\rho$. S é limitado por um pedaço de parabolóide.

$$\int_S f = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \rho(y/\rho) d\rho \right) dy \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 y^{3/2} dy = 4\pi/5$$

Como f é positiva, a existência dos integrais iterados garante a existência do integral de f em S, pelo teorema de Tonelli. O teorema de Fubini diz-nos então que o integral vale $4\pi/5$

3. A integranda é mensurável. Em $0 \leq x \leq \pi/2$ temos que

$$\cos(x) \geq (1 - \frac{2}{\pi} x)$$

Logo

$$\frac{\sqrt{\pi - 2x}}{\cos(x)} \leq \frac{\sqrt{\pi - 2x}}{(1 - \frac{2}{\pi} x)} = \frac{1}{\pi \sqrt{\pi - 2x}}$$

Mas $\frac{1}{\sqrt{\pi - 2x}}$ é integrável em $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\pi - 2x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

Como sabemos que $1/\sqrt{u}$ é integrável em $[0, \pi]$, o integral existe.

4. Vamos verificar se os integrais iterados existem:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(x)^\alpha} \left(\int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{y^\alpha} dy \right) dx$$

O integral em y existe desde que $\alpha > 1$ e, nesse caso, pelo teorema da convergência monótona temos,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(x)^\alpha} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi/2$$

Pelo teorema de Tonelli o integral existe caso os integrais iterados existam porque a integranda é positiva.

Logo, $\displaystyle\int_X \frac{x}{(1+x^2)(xy)^\alpha} dxdy$ existe sse $\alpha > 1$.

Este exercício também pode ser resolvido com uma transformação de variáveis $u = xy, v = x$.

5. Para uma função em escada de um só degrau:

$$s(x) = \begin{cases} c, & \text{se } x \in [a, b] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} s(x)\cos(xt) = \lim_{t\to\infty} c \cdot \int_a^b \cos(xt)dx = c \cdot \lim_{t\to\infty} [(\sin(bt) - \sin(at))/t] = 0$$

O mesmo argumento se aplica a qualquer função em escada.

Como f é integrável pode escrever-se $f = h + g$ onde h é uma função em escada e o módulo do integral de g é arbitrariamente pequeno.

Como $|\cos(tx)| \leq 1$, $h(x)\cos(tx)$ e $g(x)\cos(tx)$ também são integráveis. Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x)\cos(tx)dx = 0 + \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g(x)\cos(tx)dx$$

que é zero porque o módulo do integral de g é arbitrariamente pequeno.