Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 14 de Maio de 99 - 18h00

1. a) Designe-se por $A(S)$ a área de S.

$$A(S) = \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} dy \right) dx$$

b) Designe-se por $M(S)$ a massa de S e por $\overline{x}$ a abcissa do centro de massa.

$$M(S) = \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} y\, dy \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{0}^{1} r^2 \mathrm{sen}\theta\, dr \right) d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\overline{x} = 2 \left[\int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} xy\, dy \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{0}^{1} r^3 \cos\theta \mathrm{sen}\theta\, dr \right) d\theta \right] = -\frac{5}{12}$$

2. Em coordenadas cilíndricas calcule-se o seguinte integral iterado:

$$\int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{\rho}^{1} \frac{\rho}{\rho}\, dz \right) d\rho \right) d\theta = \pi$$

Dado que $f > 0$, aplicando sucessivamente os teoremas de Tonelli, Fubini e da mudança de variáveis, conclui-se que f é integrável em S e

$$\int_S f = \pi$$

3. No intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ verifica-se a seguinte desigualdade

$$\mathrm{sen} x > \frac{2}{\pi} x$$

e, portanto,

$$0 < f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{sen} x} < \frac{\pi}{2\sqrt{x}} = g(x)$$

Dado que a função g é integrável no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ e sendo f contínua e $f < g$, tem-se que f é integrável naquele intervalo.

4. Calcule-se o seguinte integral iterado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \left(\int_{f(x)}^{\infty} \frac{1}{1+(y-f(x))^2}\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \left(\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du \right) dx = \pi$$

O teorema de Tonelli permite concluir que o integral existe e não depende de f.

5. Suponhamos que não se tem: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Então

$$\exists \epsilon > 0\ \forall R > 0\ \exists x > R\,;\, |f(x)| \geq \epsilon$$

Portanto, podemos determinar uma sucessão crescente (x_k), tal que

$$|x_k - x_{k-1}| > 1\ ; \quad f(x_k) \geq \epsilon$$

Seja $I_k = \{x : |x - x_k| < \frac{1}{k}\}$. Em cada um destes intervalos temos

$$f(x) > f(x_k) - \frac{M}{k}$$

Dado que existe k_0 tal que, para $k > k_0$, se tem $\frac{M}{k} < \frac{\epsilon}{2}$, então

$$f(x) \geq \frac{\epsilon}{2}\ ; \quad \forall x \in I_k\ ;\ k > k_0$$

Assim, considere-se a função $g_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, com $n \geq k_0 + 1$, definida por

$$g_n(x) = \sum_{k=k_o+1}^{n} \frac{\epsilon}{2} H_k(x)$$

em que

$$H_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in I_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por definição, $0 \leq g_n \leq f\ ;\ \forall n \geq k_0 + 1$. Mas

$$\int_0^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{k=k_o+1}^{n} \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{k}$$

o que mostra que a sucessão de integrais $\left(\int_0^{\infty} g_n(x)dx \right)$ não é limitada e, portanto, f não é integrável, que contradiz a hipótese sobre f.