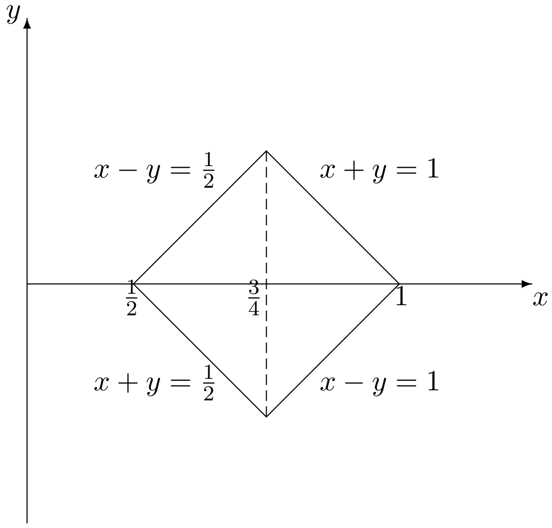
Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

Resolução do 1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 15h00

1. a) A região S tem o seguinte aspecto:



Portanto uma expressão para o integral é dada por

$$\int_S f = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}-x}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dydx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} dydx$$

b) O jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} x &= (u+1)^2 + (v+1)^2 \\ y &= (u+1)^2 - (v+1)^2 \end{aligned}$$

é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} 2(u+1) & 2(v+1) \\ 2(u+1) & -2(v+1) \end{vmatrix} \\ &= -8(u+1)(v+1) \end{aligned}$$

Nas novas variáveis $(u,v) \in]1, +\infty[\times]1, +\infty[$ o conjunto S é definido pelas condições

$$\begin{array}{lclcl} x + y \geq \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & (u+1)^2 \geq \frac{1}{4} & \Leftrightarrow & u \geq -\frac{1}{2} \\ x + y \leq 1 & \Leftrightarrow & (u+1)^2 \leq \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & u \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x - y \geq \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & (v+1)^2 \geq \frac{1}{4} & \Leftrightarrow & v \geq -\frac{1}{2} \\ x - y \leq 1 & \Leftrightarrow & (v+1)^2 \leq \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & v \leq -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

Note-se que nas equações acima usámos o facto de se ter $u > -1$ e $v > -1$ para resolver as inequações.

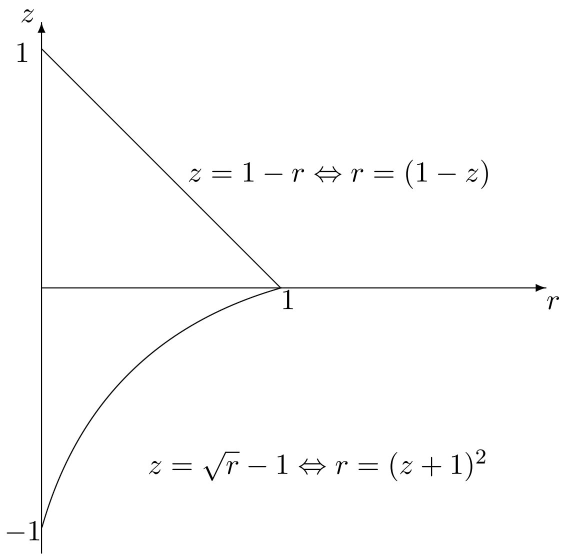
Finalmente, a função f escrita nas novas variáveis é

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-y)(x+y)}} = \frac{1}{\sqrt{4(u+1)^2(v+1)^2}} = \frac{1}{2(u+1)(v+1)}$$

(novamente usando o facto de se ter $u > -1$ e $v > -1$). Portanto, pelo teorema de mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2(u+1)(v+1)} 8(u+1)(v+1)\, dudv \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}} 4dudv \\ &= 4(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2})^2 \\ &= (\sqrt{2}-1)^2 \end{aligned}$$

2. a) Fazendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$, V é definido por $\sqrt{r}-1 \leq z \leq 1-r$. Portanto V é a seguinte região plana rodada em torno do eixo Oz:



Para cada valor de z fixo, x e y variam num círculo com o raio indicado na figura acima. Assim, uma expressão para o volume é dada pelo integral iterado:

$$\int_{-1}^{0} \int_{-(1+z)^2}^{(1+z)^2} \int_{-\sqrt{(1+z)^4-x^2}}^{\sqrt{(1+z)^4-x^2}} 1\, dydxdz +$$

$$\int_{0}^{1} \int_{-(1-z)}^{1-z} \int_{-\sqrt{(1-z)^2-x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-x^2}} 1\, dydxdz$$

b) As coordenadas mais adequadas ao cálculo deste integral são coordenadas cilíndricas centradas no eixo Oz. Tendo em conta a figura acima obtemos a seguinte expressão para o volume:

$$\begin{aligned} Vol(V) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{r}-1}^{1-r} r\,dzdrd\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 (1-r-\sqrt{r}+1)r\,dr \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

3. a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{x^2+y^2}\right) = 2xye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{x^2+y^2}\right) = 2xye^{x^2+y^2}$$

Como as derivadas cruzadas são iguais, o campo é fechado.

b) Como $\mathbb{R}^2$ é um conjunto em estrela, podemos concluir da alínea anterior que o campo é gradiante. Portanto o integral ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{R}^2$ é 0.

Alternativamente pode calcular-se o integral directamente.

4. Comecamos por observar que é impossível que se tenha $f(x) > A$ para todo o $x \in [0,1]^n$. De facto, como f é contínua em $[0,1]^n$, f teria um mínimo $m > A$ e portanto

$$\int_{[0,1]^n} f \geq \int_{[0,1]^n} m = mVol([0,1]^n) = m > A$$

Da mesma forma vemos que é impossível que se tenha $f(x) < A$ para todo o $x \in [0,1]^n$.

Seja então f tal que $\int_{[0,1]^n} f = A$ e suponhamos que não existe $x \in [0,1]^n$ tal que $f(x) = A$. Então de acordo com as observações anteriores existem necessáriamente $x_1 \in [0,1]^n$ tal que $f(x_1) > A$ e $x_2 \in [0,1]^n$ tal que $f(x_2) < A$.

Mas então pelo teorema do valor médio, existe $s \in [0,1]$ tal que a função contínua $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

verifica $g(s) = A$. Como $sx_1 + (1-s)x_2 \in [0,1]^n$ isto contradiz a hipótese que pusemos sobre f de nunca assumir o valor A.

Concluímos que existe necessá riamente $x \in [0,1]^n$ tal que $f(x) = A$ como pretendíamos demonstrar.