

Análise Matemática III
2001/2002 - Época Especial
9 de Setembro de 2002 – 9 horas

Duração: 3h

(2 val.) 1. Considere o integral

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{x^3}^0 dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x^3}^1 dy \right) dx.$$

Invertendo a ordem de integração, escreva a expressão para o mesmo integral na forma $\int(\int dx)dy$.

2. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1/4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) (b) Calcule o volume de V .

3. Considere o campo vectorial fechado em \mathbb{R}^2 ,

$$f(x, y) = (2e^x, 4e^y).$$

(1.5 val.) (a) Calcule o trabalho de f ao longo do caminho $\gamma(t) = (t \operatorname{sent} t, t \operatorname{cos} t)$, $t \in [0, \pi/2]$, que une os pontos $(0, 0)$ e $(\pi/2, 0)$.

(1 val.) (b) Calcule o trabalho de f ao longo da elipse de equação $x^2/2 + y^2/4 = 1$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

(1.5 val.) (c) Considere o campo vectorial

$$g(x, y) = \left(2e^x - \frac{y}{x^2 + y^2}, 4e^y + \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Calcule o trabalho de g ao longo da circunferência $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

(2 val.) 4. (a) Considere as curvas

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2/9 = 1\}.$$

Determine o espaço normal em cada ponto destas curvas.

(2 val.) (b) Determine o valor máximo e mínimo da função $f(x, y) = x + y$ na região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}.$$

5. Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (xe^z, -ye^z, 1)$ definido em \mathbb{R}^3 e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de f através de S no sentido da normal que no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 3)$ é dada pelo vector $(0, 0, 1)$.

(2 val.) (b) Calcule o mesmo fluxo através do teorema da divergência.

(2 val.) 6. Calcule o integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}.$$

Justifique cuidadosamente.