Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Exame

15 de Julho de 99

Duração - 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

(3) 1. Calcule, justificadamente, a área de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 < 12\}$.

(3) 2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um sólido limitado por duas superfícies cilíndricas verticais, concêntricas de raios 1 e 2, respectivamente, e de altura 1.

Calcule o momento de inércia de S relativo ao eixo vertical sabendo que a densidade do material é constante e igual a 1.

(1) 3. Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\, dx$ existe.

(2) 4. **a)** Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa. Mostre que se $\displaystyle\int_S f = 0$, então $f \equiv 0$.

(1) **b)** Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ tem medida nula.

5. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y)$$

e a variedade

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (2, 0)\}$$

(2) **a)** Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Calcule a derivada $Df(0)$.

(2) **b)** Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade C no ponto $(1, 1, 0)$.

(2) **c)** Mostre que C tem dimensão 1 e calcule o seu comprimento.

Volte S. F. F.

6. Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (\, xg(z)\, ,\, -yg(z)\, ,\, z\,)$$

em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1.

(3) **a)** Fixe uma normal ao cilindro

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4\, ;\, 0 < z < 1\}$$

e use o teorema da divergência para provar que o fluxo de f através de S, segundo essa normal, não depende de g.

(1) **b)** Mostre que f é um campo gradiente se e só se g fôr uma função constante.