Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2º Teste e 1º Exame - 1 de Julho de 99

2º Teste - Grupos 5 e 6 - 90 minutos
1º Exame - Todos os Grupos - 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ limitado pelos planos $z = 0,\ x = 0$, $x + y + z = 1$ e $x - y + z = 1$.

(2.5) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma: $\int \left(\int \left(\int dy \right) dz \right) dx$

(2.5) b) Calcule a massa de um corpo com a forma de V e densidade $\rho(x, y, z) = x$.

(1.5) 2. Dada uma função contínua $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, estabeleça condições suficientes sobre f de forma que o integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(x)x^\alpha}\, dx$$

exista. Dê um exemplo de uma função nessas condições.

(1.5) 3. Seja $f(t)$ a função definida por $f(t) = \int_1^2 \frac{\exp(x)}{x} \operatorname{sen}(tx)\, dx$, com $t \in \mathbb{R}$. Calcule $f'(0)$.

(2) 4. Calcule $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, e^{-\frac{y}{x}}\, \frac{y}{x}\, dx\, dy$.

Volte S. F. F.

5. Considere a superfície S em $\mathbb{R}^3$ definida pela equação

$$F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^2 - 1 = 0.$$

(1) a) Verifique que $(1, 0, 0)$ é uma solução da equação. Se pretender descrever as soluções da equação numa vizinhança de $(1, 0, 0)$, qual variável deverá escrever em função das outras ? Justifique.

(1.5) b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a S no ponto $(0, 0, 1)$.

(1.5) c) Seja S_+ o sub-conjunto de S com $z > 0$. Responda a uma e uma só das seguintes questões (à sua escolha):

i) Escreva uma expressão para a área de S_+ em termos de um integral múltiplo. Não calcule o integral.

ii) Determine a distância de S_+ à origem.

6. Considere o pedaço de cone M definido pelas condições

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 < z < 1\}.$$

Seja n a normal unitária a M cuja componente segundo z é positiva.

(2) a) Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (-y \operatorname{sen}^2(x+y), x \operatorname{sen}^2(x+y), z)$. Calcule $\int_V \operatorname{div} f$ onde V é o volume limitado por M e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

(2) b) Considere o campo vectorial $h(x, y, z) = (\frac{-y}{(x^2+y^2)^3}, \frac{x}{(x^2+y^2)^3}, 1)$ definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo dos } z\}$.
Calcule o fluxo de $\operatorname{rot}(h)$ através de M no sentido de n.

(2) c) Decida se o campo vectorial h da alínea anterior é ou não um gradiante em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo dos } z\}$. Justifique.