

## Análise Matemática III

2º Teste e 1º Exame - 20 de Janeiro 2000 - 13 horas

2º Teste: Grupos 4, 5 e 6 - 1º Exame: Todos os grupos

Duração: Teste 90 minutos - Exame 3 horas

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Seja  $V \subset \mathbb{R}^3$  o sólido definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0; y > 0; 1 < x^2 + y^2 < 4; 0 < z < 5 - x^2 - y^2\}$$

- (2) a) Escreva uma expressão para o volume de  $V$  em termos de integrais iterados da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ .
- (2) b) Calcule as coordenadas do centróide de  $V$ .

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y < x < 3 - y, e^x + 1 < y < e^x + 2\}$$

- (3) Calcule o integral

$$\int \int_S \frac{e^x + 1}{\sqrt{y - e^x}} dx dy$$

3. Seja  $\alpha : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  o caminho dado pela expressão

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$$

e seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo vectorial definido por

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

- (1.5) a) Calcule o comprimento do caminho  $\alpha$ .
- (1.5) b) Calcule o trabalho realizado pela força  $F$  ao longo do caminho  $\alpha$ .

4. Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, -1 < z < 0\}$ .

- (2) a) Calcule o momento de inércia de  $S$  em relação ao eixo  $Oz$  se a densidade de massa for dada por  $f(x, y, z) = -z$ .
- (1) b) Calcule o espaço tangente a  $S$  no ponto  $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ .

5. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + y^2 + z^2, x \leq 0\}$$

e considere os campos vectoriais

$$F(x, y, z) = (1 + x^2 + xy^3, xy, -3xz)$$

$$G(x, y, z) = (xz, ze^x, -y)$$

- (2.5) a) Calcule o fluxo de  $F$  através de  $S$  no sentido da normal cuja componente segundo  $x$  é positiva.
- (2) b) Calcule o fluxo de  $\text{rot}G$  através de  $S$  no sentido da normal cuja componente segundo  $x$  é negativa.

- (1.5) 6. a) Determine se a função  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$$

é ou não integrável.

- (1) b) Calcule

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2 + y^2)^{5/4}} dx dy$$