

Análise Matemática III
Exame de Época Especial - 16 de Setembro de 1999

Duração - 3 horas

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x+z \leq 2, z-x \leq 2, y+z \leq 2, z-y \leq 2\}.$$

- (3) a) Calcule o volume de V utilizando um integral triplo.
(2) b) Calcule a coordenada z do centro de massa de um corpo com a forma de V e densidade constante $\rho(x, y, z) = 3$.

(1) 2. a) Calcule justificadamente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} k \exp(-kx) dx.$$

- (1) b) Decida se o integral $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x)}{\sqrt{x}} dx$ existe. Justifique.
(3) c) Considere o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Calcule

$$\int_A \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} dx dy dz.$$

3. Considere a superfície S em \mathbb{R}^3 definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1 + x^2 + y^2, z < 0\}.$$

- (2) a) Determine o espaço tangente e o espaço normal a S no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
(2) b) Calcule a área de S .

4. Considere o caminho fechado $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 7, z = 3\}$.

- (2.5) a) Escolha um sentido para percorrer C e utilizando o teorema de Stokes calcule o trabalho do campo vectorial $f(x, y, z) = (\frac{x}{z-4}, \frac{y}{z-4}, 0)$ ao longo de C segundo esse sentido.
(1) b) Será o campo vectorial f da alínea anterior um gradiente no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4\}$? Justifique.

5. Considere a superfície M definida pelas condições

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16, z < 3\}.$$

- (2.5) Escolha e fixe uma normal unitária a M . Calcule o fluxo do campo vectorial $h(x, y, z) = (x + \arctg(y^2), y + \arctg(z^2), z - 3)$ através de M no sentido dessa normal.