

Análise Matemática III
1º Teste - 23 de Abril de 2005 - 11h
Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq z \leq 2; x + y \leq 1; x \geq 0; y \geq 0\}.$$

- (2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dy) dx$.
- (2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.
- (2) c) Calcule $\int_V \frac{1}{2-x-y}$.

2. Considere o sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; 1 \leq x^2 + y^2; y \geq 0\}.$$

- (4) Calcule a massa de A sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$.

3. Considere os campos vectoriais F e H definidos por

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (yz^2, xz^2, 2xyz) \\ H(x, y, z) &= \left(-\frac{y}{(x-1)^2 + 4y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + 4y^2}, 0 \right). \end{aligned}$$

- (2) a) Mostre que F é um gradiente no seu domínio e calcule $\int_C F \cdot dg$, onde C é a curva descrita pelo caminho $g(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$, com $t \in [0, \pi/4]$.
- (2) b) Usando a definição, calcule o integral de linha de H ao longo da elipse $(x-1)^2 + 4y^2 = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando observada do ponto $(1, 0, 5)$.
- (3) c) Calcule $\int (F + H) \cdot d\alpha$ onde α é o caminho fechado que descreve a linha quadrada no plano $z = 0$ que une os pontos $(0, -1, 0)$, $(2, -1, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ e percorrida por esta ordem.

(3) 4. Considere o conjunto

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

Mostre que para qualquer função contínua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, se tem

$$\int_U f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \frac{1}{n!} \left[\int_0^1 f(t) dt \right]^n.$$