

Análise Matemática III

1º Teste - 28 de Abril de 2001 - 8h30m

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a região A no plano definida por (2.5)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 - x^2 \leq y \leq x^2, 2 \leq x \leq 3\}.$$

Determine a área de A utilizando um integral múltiplo apropriado.

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}, x, y \geq 0\}.$$

- a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da (2.5) forma $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

- b) Calcule o volume de V usando coordenadas cilíndricas. (2.5)

3. Considere as regiões S e U em \mathbb{R}^2 definidas por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 4 - 4x^2\} \text{ e } U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2, u^2 < v < 4\}.$$

- a) Mostre que $(x, y) = g(u, v) = (u/2, v - u^2)$ é uma transformação de coordenadas (1.5) que transforma U em S .

- b) Utilize a transformação de coordenadas g para calcular o integral (2.5)

$$\int_S x e^{(y+4x^2)^2} dx dy.$$

4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b > 0, c > 0$. Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = (ay^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) \text{ e o caminho } g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definido por } g(t) = (t, t^b, t^c).$$

- a) Calcule o trabalho de f ao longo do caminho g . (2)

- b) Determine o valor de a para o qual a força f realiza sempre o mesmo trabalho (1) ao longo dos caminhos $g(t)$ quaisquer que sejam os valores de b e de c .

- c) Fixe $b = c = 3/2$ e calcule o comprimento do caminho g . (2)

5. Determine se a função (3.5)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{3-x}}$$

é integrável no intervalo $I =]0, 3[$. Justifique detalhadamente.