

Análise Matemática III

1º Teste - 11 de Novembro de 2000 - 9h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \leq 4, x, y, z \geq 0\}.$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma

$$\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz.$$

(3) b) Calcule a massa de um sólido com a forma de V e densidade de massa igual a z .

(3) 2. Considere a região $U \subset \mathbb{R}^2$ definida por

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < 1, 2x + 1 < y < 2x + 2\}.$$

Calcule o integral duplo

$$\int_U \operatorname{sen}(x + y) e^{2x-y} dx dy,$$

utilizando uma mudança de coordenadas apropriada. Justifique detalhadamente a resposta.

3. Considere o campo vectorial $f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \right)$ definido em

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 4\}.$$

(2) a) Verifique se f é ou não um campo fechado em S .

(3) b) Será f um gradiente em S ? Justifique.

(2.5) c) Calcule o trabalho de f ao longo do arco de parábola parametrizado pelo caminho $g(t) = (t, 3 + t^2)$ com $t \in [-1, 2]$.

(3.5) 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $R \subset U$ uma região limitada por uma curva regular simples $C \subset U$, e

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

uma aplicação de classe C^2 , injectiva, tal que $\det DG > 0$. Use o teorema de Green para demonstrar o seguinte caso particular da fórmula de mudança de coordenadas

$$\int \int_{G(R)} dx dy = \int \int_R \det DG du dv.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

Sugestão: Seja $G(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$. Comece por mostrar que o trabalho do campo vectorial $a(x, y) = (0, x)$ ao longo de $G(C)$ é igual ao trabalho do campo vectorial $b(u, v) = (f \frac{\partial g}{\partial u}, f \frac{\partial g}{\partial v})$ ao longo de C .