Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

1º Teste - 14 de Maio de 99 - 18h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0 \ ; \ x^2 + y^2 < 1 \ ; \ x + y < 1\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para a área de S em termos de integrais iterados da forma: $\int \left(\int dy \right) dx$

(3) b) Calcule a abcissa do centro de massa de S para o caso em que a densidade é dada por $\rho(x,y) = y$.

(4) 2. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$$

e a funÁo $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Decida sobre a integrabilidade da função f em S e, em caso afirmativo, calcule o respectivo integral $\int_S f$.

(4) 3. Prove que o integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{sen} x}\, dx$$

existe.

(3) 4. Considere o conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$, em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Mostre que o integral

$$\int_X \frac{e^{-|x|}}{1 + (y - f(x))^2}\, dxdy$$

existe e não depende de f.

(3) 5. Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função não negativa, integrável em $[0,\infty[$ e que verifica a seguinte condição:

$$\exists M > 0 \ , \ \forall x,y > 0 \ , \ |f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

Prove que se tem

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$