

Análise Matemática III

1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 15h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1, \frac{1}{2} \leq x - y \leq 1\}$$

e seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

- (3) a) Escreva uma expressão para $\int_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int (f dy) dx$.
- (3) b) Calcule o integral $\int_S f$ usando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = (u + 1)^2 + (v + 1)^2 \\ y = (u + 1)^2 - (v + 1)^2 \end{cases}$$

definida no conjunto $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > -1, v > -1\}$.

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt[4]{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

- (3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral iterado da forma
- $$\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$$
- (3) b) Calcule o volume de V da forma que preferir.

3. Considere o campo vectorial $F(x, y) = (xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2})$ definido em \mathbb{R}^2 .

- (2) a) Mostre que o campo é fechado.
- (3) b) Calcule o integral de linha de F ao longo de um caminho fechado simples que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem uma vez no sentido directo.

(3) 4. Seja $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_{[0,1]^n} f = A$$

Mostre que existe $x \in [0, 1]^n$ tal que $f(x) = A$.