

Análise Matemática III

1º Teste - 6 de Maio de 2000 - 13h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 2(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2, z \geq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2 - 2(x^2 + y^2), x, y \geq 0\}.$$

- (2) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.
- (2) b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dy) dx$.
- (3) c) Calcule o volume de V utilizando coordenadas cilíndricas.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (\exp(x + y), \exp(x - y))$.

- (2.5) a) Mostre que g define uma transformação de coordenadas em

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(\pi/2) \leq (x+y) \leq \log(\pi), \log(\pi/2) \leq (x-y) \leq \log(\pi)\}.$$

- (2.5) b) Utilize a transformação g para calcular o integral

$$\int \int_S e^{2x} \sin(e^{x+y}) \cos(e^{x-y}) dx dy.$$

3. Considere o caminho em \mathbb{R}^3 definido por $g(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, onde $t \in [0, 6\pi]$. Seja C a curva representada por g .

- (1.5) a) Calcule o comprimento do caminho g .
- (1.5) b) Calcule a massa de C , sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é dada por $\rho(x, y, z) = z^2$.
- (2) c) Calcule o trabalho da força $f(x, y, z) = (x, y, z)$ ao longo de C , percorrida no sentido descendente dos z .

(3) 4. Determine, justificando, quais das seguintes funções são integráveis no seu domínio:

a) $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$.

b) $g : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = \frac{1}{1-x}$.