

Análise Matemática III

1º Teste - 13 de Novembro de 99 - 13h00

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + y \leq 4, 2 \leq x - y \leq 4\}$$

e seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(3) a) Escreva uma expressão para $\int_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int dy \right) dx$.

(3) b) Calcule o integral $\int_S f$ usando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \sqrt{u+1} + \sqrt{v+1} \\ y = \sqrt{u+1} - \sqrt{v+1} \end{cases}$$

definida no conjunto $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > -1, v > -1\}$.

2. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

(3) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de um integral iterado da forma

$$\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$$

(3) b) Calcule o volume de V da forma que preferir.

3. Considere o campo vectorial $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

(2) a) Mostre que o campo é fechado.

(3) b) Calcule o integral de linha de F ao longo de um caminho fechado simples que percorre a circunferência de raio 1 centrada na origem uma vez no sentido directo.

(3) 4. Seja $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f^2 :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limite superior em $]0, 1[$. Mostre que f é uma função limite superior em $]0, 1[$.