Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2001/2002

1º Teste

10 de Novembro de 2001 – 9 horas

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a seguinte região contida em $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) b) Seja $f(x,y,z) = x$. Calcule $\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$.

(3 val.) **2.** Um sólido na região

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2+\frac{y^2}{9}} \leq z \leq 4-3(x^2+\frac{y^2}{9}),\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

tem densidade de massa $\sigma(x,y,z) = 2x$.

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido.

3. Considere os seguintes campos vectoriais.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(2xz,\, 2yz,\, x^2+10y^2+z^2\right), \quad \mathbf{G}(x,y,z) = ((x-1)^2+y^2)^3\left(x-1,\, y,\, 0\right)$$

(2 val.) (a) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são fechados.

(3 val.) (b) Determine se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são gradientes.

(3 val.) (c) Seja $\boldsymbol{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ o caminho definido por $\boldsymbol{\alpha}(t) = (e^{t^2}, e^{t^2}\mathrm{sen}t, 0)$. Calcule $\int \mathbf{G}\cdot d\boldsymbol{\alpha}$.

(3 val.) **4.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O *laplaciano* de f é a função $\Delta f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Seja $C_\epsilon = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = \epsilon^2\right\}$ e $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Mostre que

$$\Delta f(x_0,y_0) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde $\mathbf{g}$ é um caminho regular que percorre C_ϵ uma vez no sentido anti-horário.

Sugestão: Use o teorema de Green.