

ANÁLISE MATEMÁTICA III

TODOS OS CURSOS EXCEPTO LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 9 DE NOVEMBRO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

duração: hora e meia (9:00-10:30)

(1) Considere a seguinte região de \mathbb{R}^3 :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \sin y \leq z \leq 1\}.$$

(3 val.) (a) Calcule o integral $\iiint_V 2z$.

(3 val.) (b) Escreva uma expressão para $\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

(3 val.) (2) Um sólido com a forma da região

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}$$

tem densidade de massa $f(x, y, z) = e^y$. Calcule a massa total do sólido.

(3) Considere os campos vectoriais seguintes:

$$F(x, y, z) = (2xz e^{x^2+y}, z e^{x^2+y}, e^{x^2+y}) \quad \text{e} \quad G(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + z^2}(-z, 0, x).$$

(3 val.) (a) Calcule o trabalho de F ao longo do arco da hipérbole definida por $z = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$, desde o ponto $(1, 0, 1)$ até ao ponto $(\sqrt{2}, 1, 1)$.

(3 val.) (b) Calcule o trabalho de G ao longo da circunferência definida por $x^2 + z^2 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário para um observador colocado no ponto $(0, -10, 0)$, e diga se G é ou não um gradiente no seu domínio.

(2 val.) (c) Calcule o trabalho de G ao longo da elipse definida por $x^2/10 + z^2/55 = 1$ e $y = 0$, percorrida no sentido anti-horário quando se observa de $(0, -10, 0)$.

(3 val.) (4) Seja $A \subset [0, 1]$ um conjunto da forma $A = \cup_{i=1}^{+\infty}]a_i, b_i[$ com $\sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i) < 1$ e tal que todos os racionais de $]0, 1[$ pertencem a A . Mostre que a fronteira de A não tem medida nula.