Análise Matemática III

$2^{\underline{o}}$ Teste e $1^{\underline{o}}$ Exame - Todos os cursos

19 de Janeiro de 1999

$2^{\underline{o}}$ Teste - Grupos 4,5 e 6 - 90 minutos.
$1^{\underline{o}}$ Exame - Todos os Grupos - 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(4 val.) **1.** Considere o sólido A descrito por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 < x < 2, \quad z < 0, \quad y^2 + z^2 < x^2\}.$$

a) Esboce o sólido A.

b) Escreva uma expressão para o seu volume em termos de integrais nas formas $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dz)dy)dx$ e $\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots}(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots d\theta)d\rho)dx$, onde $y = \rho \cos\theta$ e $z = \rho \operatorname{sen}\theta$. <u>Não</u> necessita de calcular os integrais.

c) Calcule a massa de A, sabendo que a função densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

(3 val.) **2.** Considere os conjuntos:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 - y^2 < 1, \ 0 < 2xy < 2, \ y > 0\}$$
$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 < u < 1, \ 0 < v < 2\}.$$

a) Prove que $g(x, y) = (u, v) = (x^2 - y^2, 2xy)$ é uma transformação de coordenadas entre X e U.

b) Calcule

$$\iint_X x^3y + y^3x \quad dxdy.$$

(<u>Sugestão:</u> lembre-se de que $[D(g^{-1})] = [Dg\ ]^{-1}$.)

(3 val.) **3.** a) Determine justificando os valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a função $f(x, y, z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ é integrável em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$.

b) Calcule ou prove que não existe o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{2} \operatorname{arctg}(|x|^n + |y|^n) dxdy.$$

(4 val.) **4.** Considere a variedade

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = \text{sen}(x)\text{sen}(y),\ z > 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}.$$

a) Determine o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(\pi/2, \pi/2, 1)$ e justifique a resposta.

b) Escreva uma expressão para a área de M. Não necessita de calcular o integral mas tem de o apresentar explicitamente como integral múltiplo.

(4 val.) **5.** Seja α um real positivo, $\alpha > 0$. Considere o conjunto

$$S_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \alpha(x^2+y^2),\ 1 < x^2+y^2 < 2\}.$$

Seja $\vec{n}$ a normal unitária a S_α com a componente segundo z negativa.

a) Considere o campo vectorial $F(x,y,x) = (yz, -xz, \text{arctg}(x^3y^2))$, definido em $\mathbb{R}^3$. Determine α de modo a que o fluxo de $\text{rot}F$ através de S_α no sentido de $\vec{n}$ seja igual a π.

b) Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$,
$H(x,y,z) = (x^3, y^3, (z-\alpha)(z-2\alpha))$. Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo de H através de S_α no sentido de $\vec{n}$.

(2 val.) **6.** Considere o campo vectorial

$$F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}).$$

Calcule o integral de linha de F ao longo do caminho fronteiro a um losango, que une os pontos $(2,0)$,$(0,-2)$,$(-2,0)$ e $(0,2)$ percorrido no sentido horário. Justifique a resposta.