

Análise Matemática III A - 1º semestre de 2006/07

FICHA DE TRABALHO 6 - RESOLUÇÃO

- 1) Indique se as formas diferenciais seguintes são fechadas e/ou exactas no seu domínio. Para cada forma exacta calcule um potencial.

a) $\xi = e^y dx - zy dy + e^z dz$.

b) $\eta = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} dx + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} dy + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} dz$.

c) $\varphi = x \cos z dx \wedge dy + xy \sin z dx \wedge dz + x^2 \sin z dy \wedge dz$.

d) $\mu = xyz dx \wedge dy \wedge dw + xyw dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dw$.

Resolução:

a) $d\xi = -e^y dx \wedge dy + y dy \wedge dz$. Logo, ξ não é fechada nem exacta.

b) Temos $d\eta = 0$, pelo que η é fechada. O domínio de η é $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ que não é um conjunto em estrela. Logo, não podemos aplicar o lema de Poincaré para concluir que η é exacta. Vamos tentar encontrar um potencial $\beta \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$. Então $d\beta = \eta$ fornece:

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

A primeira equação fornece $\beta(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha(y, z)$. Confirmamos facilmente que com $\alpha(y, z) = 0$ satisfazemos as restantes equações. Por outro lado, a função $\beta(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ é de classe C^∞ no domínio de η . Logo, η é exacta no seu domínio.

c) Temos $d\varphi = 0$. O domínio de φ é $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto em estrela. O lema de Poincaré permite-nos concluir que φ é exacta, $\varphi = d\gamma$ com $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Temos,

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_2}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial y} = \varphi_{12} = x \cos z \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial z} = \varphi_{13} = xy \sin z \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial z} = \varphi_{23} = x^2 \sin z \end{cases}$$

Podemos sempre encontrar um potencial com $\gamma_1 = 0$. Então, a primeira equação fornece $\gamma_2 = \frac{x^2}{2} \cos z + \alpha(y, z)$ e a segunda equação fornece $\gamma_3 = \frac{x^2 y}{2} \sin z + \beta(y, z)$. Substituindo na terceira equação, observamos que podemos resolvê-la tomando $\alpha(y, z) = \beta(y, z) = 0$: Logo, um potencial para φ é $\gamma = \frac{x^2}{2} \cos z dy + \frac{x^2 y}{2} \sin z dz$.

d) Temos $d\mu = 0$ e o seu domínio, $\mathbb{R}^4$, é um conjunto em estrela. Pelo lema de Poincaré, existe $\nu \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ com $d\nu = \mu$. Verifica-se de imediato que, por exemplo, a forma $\nu = xyzw dx \wedge dy + y dz \wedge dw$ é um potencial.

- 2) Determine se as formas diferenciais seguintes são fechadas e/ou exactas no seu domínio. Se não forem exactas no seu domínio determine, caso existam, regiões maximais onde as formas sejam exactas.

a) $\omega = \left(\frac{-(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{-(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} \right) dx + \left(\frac{(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{(x+1)}{(x+1)^2+(y-2)^2} \right) dy$.

b) $\eta = \frac{z}{x^2+z^2} dx + \frac{-z}{y^2+z^2} dy + \frac{y}{y^2+z^2} dz + \frac{-x}{x^2+z^2} dz$.

Resolução:

a) É fácil de verificar que ω é fechada. O seu domínio é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1), (-1, 2)\}$. Observamos que $\omega = \alpha + \beta$, com $\alpha = \frac{-(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} dy$ e $\beta = \frac{-(y-2)}{(x+1)^2+(y-2)^2} dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+(y-2)^2} dy$. Como foi visto na aula, a forma α é fechada mas não é exacta no seu domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1)\}$. De facto, o potencial local para α (a menos de constante) é o ângulo $\theta(x, y)$ das coordenadas polares com origem em $(1, 1)$, que tem uma descontinuidade de 2π sobre o semi-eixo $y = 1, x \geq 1$. (O semi-eixo onde o potencial é descontínuo pode ser alterado adicionando-se constantes ao potencial.)

A forma β é semelhante, sendo singular no ponto $(-1, 2)$, e sendo o seu potencial local dado (a menos de constante) por θ medido como se a origem estivesse em $(-1, 2)$. Logo, ω não é exacta: o seu potencial local tem uma descontinuidade de 2π quando rodeamos o ponto $(1, 1)$ ou o ponto $(-1, 2)$ no sentido anti-horário.

Numa região maximal onde ω seja exacta, não podem existir curvas fechadas a rodear $(1, 1)$ e/ou $(-1, 2)$. Uma dessas regiões é, por exemplo, $\mathbb{R}^2$ excepto o semi-eixo com origem em $(-1, 2)$ e que passe em $(1, 1)$.

b) Temos $\eta = \alpha + \beta$ com $\alpha = \frac{z}{x^2+z^2} dx + \frac{-x}{x^2+z^2} dz$ e $\beta = \frac{-z}{y^2+z^2} dy + \frac{y}{y^2+z^2} dz$, sendo α e β fechadas. O domínio de α é $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eixo dos } y$ e o

domínio de β é $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eixo dos } x$. As formas α, β são generalizações óbvias para $\mathbb{R}^3$ de formas do tipo das da alínea anterior que examinámos na aula. As formas α e β são ambas fechadas mas não são exactas: o potencial para α tem uma descontinuidade de -2π quando rodamos à volta do eixo dos y (no sentido em que o semi-eixo positivo dos x roda para o semi-eixo positivo dos z); o potencial para β tem uma descontinuidade de $+2\pi$ quando rodamos à volta do eixo dos x (no sentido em que o semi-eixo positivo dos y roda para o semi-eixo positivo dos z).

Deste modo, a forma η será exacta apenas numa região onde seja impossível rodear *separadamente* o eixo dos y ou o eixo dos z . No entanto, é permitido rodear *simultaneamente* os dois eixos, pois, nesse caso, as descontinuidades nos potenciais cancelam-se. Por exemplo, na região $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, xy > 0\}$ a forma η é exacta.

- 3) Considere a variedade-1, $C \subset \mathbb{R}^3$, definida por $x^2/4 + y^2/16 = 1, z = x^2$, orientada no sentido horário relativamente a um observador colocado no ponto $(0, 0, 10)$. Seja $\omega = -y dx + x dy + dz$. Calcule $\int_C \omega$ segundo a orientação dada.

Resolução:

Parametrizemos C : $\alpha(\theta) = (2 \cos \theta, -4 \sin \theta, 4 \cos^2 \theta), \theta \in]0, 2\pi[$. Temos $\alpha^* \omega = 4 \sin \theta (-2 \sin \theta d\theta) + 2 \cos \theta (-4 \cos \theta d\theta) - (8 \cos \theta \sin \theta d\theta) = -8(1 + \cos \theta \sin \theta) d\theta$. Logo,

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} (-8)(1 + \cos \theta \sin \theta) d\theta = -16\pi.$$

Note-se que α percorre C no sentido pretendido.

- 4) Considere a variedade-2,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2, 1 < x < 2\},$$

orientada com a normal unitária, n , com $n_x < 0$. Seja

$$\omega = z dx \wedge dy - y dx \wedge dz + x dy \wedge dz.$$

Calcule $\int_M \omega$ com a orientação indicada.

Resolução:

Parametrizemos M com $g(\rho, \theta) = (\rho, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, com $\rho \in]1, 2[$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Temos,

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Tomando, por exemplo, $(\rho, \theta) = (1, \pi/2)$ temos

$$Dg(1, \pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e $(1, 0, 1) \times (0, -1, 0) = (1, \cdot, \cdot)$. Como queremos a normal n a M com $n_x < 0$, concluímos que g não é compatível com n , pelo que devemos incluir um sinal de $-$ em frente do integral.

Temos, $g^*(dx \wedge dy) = -\rho \sin \theta d\rho \wedge d\theta$, $g^*(dx \wedge dz) = \rho \cos \theta d\rho \wedge d\theta$, $g^*(dy \wedge dz) = \rho d\rho \wedge d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= - \int_0^{2\pi} \int_1^2 [-\rho^2 \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2] d\rho d\theta \\ &= -2\pi \int_1^2 (-\rho^2 + \rho^2) d\rho = 0. \end{aligned}$$

5) Considere a forma fechada

$$\omega = \frac{-2x(y - x^2)}{\sqrt{z^2 + (y - x^2)^2}} dx + \frac{y - x^2}{\sqrt{z^2 + (y - x^2)^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{z^2 + (y - x^2)^2}} dz.$$

- Indique uma curva fechada E , contida no domínio de ω , tal que o valor de $\oint_E \omega$ lhe permita concluir se ω é ou não exacta. (Não necessita de calcular o integral nesta alínea.)
- Mostre que a forma ω é exacta no seu domínio determinando um potencial.
- Seja C a variedade-1 dada por $y = 2 + x$ e $z = 1 + x^5$, $0 < x < 1$, orientada de modo a que o ponto $(0, 2, 1)$ é o inicial e o ponto $(1, 3, 2)$ é o final. Calcule $\int_C \omega$ segundo a orientação dada.
- Seja γ a curva definida por $y^4 + z^4 = 1$ e $x = 0$. Calcule $\int_\gamma \omega$ segundo uma orientação à sua escolha.

Resolução:

a) A forma ω é fechada e o seu domínio é $\mathbb{R}^3 \setminus A$ onde A é a parábola $y = x^2, z = 0$. Assim, no domínio de ω , as únicas curvas fechadas que não são homotópicas a um ponto são as que rodeiam a curva (ilimitada) A . Bastaria, então, calcular o integral de ω ao longo de uma destas curvas, por exemplo, ao longo da circunferência $x = 0, y^2 + z^2 = 1$. Se esse integral fosse zero poderíamos imediatamente concluir que ω seria exacta; se ele não fosse igual a zero então ω não poderia ser exacta.

b) Observamos facilmente que as componentes de ω são as derivadas parciais do campo escalar $\phi(x, y, z) = \sqrt{z^2 + (y - x^2)^2}$ que, sendo de classe C^∞ no domínio de ω , é um potencial.

c) Pelo teorema de Stokes generalizado temos,

$$\int_C \omega = \int_C d\phi = \int_{\partial C} \phi = \phi(1, 3, 2) - \phi(0, 2, 1) = \sqrt{8} - \sqrt{5}.$$

d) Como γ é uma curva fechada contida no domínio de ω e sendo ω exacta, vamos ter $\oint_\gamma \omega = 0$.

6) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o quarto de superfície esférica de raio 1 centrada na origem dado por $y < 0, z > 0$, orientado com a normal n tal que $n_z < 0$.

a) Seja $\omega = dx \wedge dy + dx \wedge dz$.

Utilizando o teorema de Stokes generalizado, calcule $\int_S \omega$.

b) Seja $\eta = -y^2 dx + xy dy$. Escolha uma orientação para o bordo de S , ∂S .

Utilizando o teorema de Stokes generalizado, calcule $\int_{\partial S} \eta$.

Resolução:

a) $d\omega = 0$ e o domínio de ω é $\mathbb{R}^3$, logo, pelo lema de Poincaré, ω é exacta e existe um potencial $\xi \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \omega_{12} = 1 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial z} = \omega_{13} = 1 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} = \omega_{23} = 0. \end{cases}$$

Uma solução é $\xi = x dy + x dz$.

O bordo de S é constituído por uma semi-circunferência A no plano xy e por uma semi-circunferência B no plano xz . Ao orientarmos S com a normal n com $n_z < 0$, vamos, através da regra da mão direita,

induzir uma orientação em $\partial S = A \cup B$ que corresponde a percorrer A com o semi-eixo positivo dos x a girar para o semi-eixo negativo dos y , e a percorrer B com o semi-eixo positivo dos z a girar para o semi-eixo positivo dos x . Podemos então parametrizar A e B , respectivamente, com, por exemplo, $\alpha(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$ e $\beta(\theta) = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$, $\theta \in]0, \pi[$. Temos $\alpha^* \xi = -\cos^2 \theta d\theta$ e $\beta^* \xi = -\sin^2 \theta d\theta$

Logo, pelo teorema de Stokes generalizado,

$$\int_S \omega = \int_S d\xi = \int_{\partial S} \xi = \int_A \xi + \int_B \xi = \int_0^\pi (-1) \cos^2 \theta d\theta + \int_0^\pi (-1) \sin^2 \theta d\theta = -\pi.$$

b) Orientemos o bordo de S como na alínea a). Então, tomamos S orientada com a normal n tal que $n_z < 0$. Podemos parametrizar S com coordenadas esféricas, com $g(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$, $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $\phi \in]0, \pi/2[$. Temos,

$$Dg(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}.$$

Em $(\theta, \phi) = (\pi, \pi/6)$ temos,

$$Dg(\pi, \pi/6) = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

e $(0, -1/2, 0) \times (-\sqrt{3}/2, 0, -1/2) = (\cdot, \cdot, -\sqrt{3}/4)$. Logo, g é compatível com a orientação definida por n .

Temos, $g^*(dx \wedge dy) = -\cos \phi \sin \phi d\theta \wedge d\phi$, $g^*(dx \wedge dz) = \sin \theta \sin^2 \phi d\theta \wedge d\phi$, $g^*(dy \wedge dz) = -\cos \theta \sin^2 \phi d\theta \wedge d\phi$.

Temos ainda $d\eta = 3y dx \wedge dy$ e $g^*d\eta = -3 \sin \theta \cos \phi \sin^2 \phi d\theta \wedge d\phi$.

Logo,

$$\int_{\partial S} \eta = \int_S d\eta = \int_\pi^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (-3) \sin \theta \cos \phi \sin^2 \phi d\phi d\theta = 6 \int_0^{\pi/2} \cos \phi \sin^2 \phi d\phi = 2.$$

7) Considere a variedade-2,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - y^2 - z^2, z > 0, x > 1\},$$

e o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(x, y, z) = (-2x, y, z)$. Calcule o fluxo $\int_S f \cdot n$ segundo a direcção da normal n que tem a primeira componente positiva, de três formas distintas:

- a) Pela definição de fluxo.
- b) Utilizando o Teorema da Divergência.
- c) Utilizando o Teorema de Stokes.

Resolução:

a) A superfície S é uma superfície de revolução em torno do eixo dos x . Em coordenadas cilíndricas apropriadas (ρ, θ, x) , S é definida por $x = 2 - \rho^2$ com $x > 1$ e $z > 0$, logo S é parte de um parabolóide. Uma parametrização para S é dada por

$$g(\rho, \theta) = (2 - \rho^2, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta), \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \rho < 1.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -2\rho & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = (\rho, 2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta).$$

A primeira componente de $\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}$ é positiva, portanto este vector tem o sentido da normal pedida à superfície. Conclui-se que

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= \int_0^\pi \int_0^1 F(g(\rho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 (-2(2 - \rho^2), \rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot (\rho, 2\rho^2 \cos \theta, 2\rho^2 \sin \theta) d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 -2\rho(2 - \rho^2) + 2\rho^3 d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{2 - \rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{2} \right]_0^1 d\theta = -\pi. \end{aligned}$$

b) F é um campo de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo podemos aplicar o Teorema da Divergência à região

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 2 - y^2 - z^2, x > 1, z > 0\}.$$

A fronteira de D é formada por S , por metade de um disco

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, x = 1, z > 0\}$$

e pela superfície no plano $z = 0$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 2 - y^2, z = 0, x > 1\}.$$

Uma vez que a normal a S dada, n , é a normal exterior a D , o teorema da divergência diz que

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \int_S F \cdot n \, dS + \int_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \int_{S_2} F \cdot n_2 \, dS$$

onde $n_1 = (-1, 0, 0)$ e $n_2 = (0, 0, -1)$ são as normais às superfícies S_1 e S_2 , respectivamente.

Como

$$\operatorname{div} F = 2 - 1 - 1 = 0$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= - \int_{S_1} F \cdot n_1 \, dS - \int_{S_2} F \cdot n_2 \, dS \\ &= - \int_{S_1} 2x \, dS - \int_{S_2} -z \, dS \\ &= - \int_{S_1} 2 \, dS - \int_{S_2} 0 \, dS \\ &= -2 \operatorname{área}(S_1) = -2 \frac{\pi}{2} = -\pi. \end{aligned}$$

c) Uma vez que F é solenoidal (isto é, $\operatorname{div} F = 0$) e o domínio de F é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que F é um rotacional. Para achar um potencial vector A temos de resolver o sistema

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} A = F &\iff \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = (-2x, y, z) \\ &\iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = z \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo, por exemplo, $A_1 = 0$ obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} = z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -2x \\ A_3(x, y, z) = -yx + C_3(y, z) \\ A_2(x, y, z) = zx + C_2(y, z) \end{cases}$$

Substituindo na primeira equação obtemos

$$-x + \frac{\partial C_3}{\partial y}(y, z) - x - \frac{\partial C_2}{\partial z}(y, z) = -2x$$

pelo que podemos fazer $C_2(y, z) = C_3(y, z) = 0$. Conclui-se que um potencial vector para F é dado por

$$A(x, y, z) = (0, zx, -yx).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_S \operatorname{rot} A \cdot n \, dS = \oint_{\partial S} A \cdot d\gamma.$$

O bordo de S é a união das seguintes curvas:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, x = 1, z > 0\}$$

e

$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 - y^2, z = 0, x > 1\}.$$

De acordo com a regra da mão direita, Γ_1 deve ser percorrida do ponto $(1, 1, 0)$ para o ponto $(1, -1, 0)$ e Γ_2 deve ser percorrida no sentido contrário, ou seja, do ponto $(1, -1, 0)$ para o ponto $(1, 1, 0)$.

Uma parametrização de Γ_1 é

$$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \sin t), \quad 0 < t < \pi$$

e uma parametrização para Γ_2 é

$$\gamma_2(t) = (2 - t^2, t, 0), \quad -1 < t < 1,$$

que percorrem as curvas no sentido desejado. Assim,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot n \, dS &= \oint_{\Gamma_1} A \cdot d\gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} A \cdot d\gamma_2 \\ &= \int_0^\pi (0, \sin t, -\cos t) \cdot (0, -\sin t, \cos t) \, dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 (0, 0, -t(2 - t^2)) \cdot (-2t, 1, 0) \, dt \\ &= \int_0^\pi -1 \, dt + 0 = -\pi. \end{aligned}$$

8) Considere o campo vectorial

$$h(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z-1}{x^2 + (z-1)^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} + y^3, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x}{x^2 + (z-1)^2} \right).$$

- Verifique que h é fechado. Será h um gradiente no seu domínio? Justifique.
- Calcule o trabalho de h ao longo da espiral parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, t, 1 + \sin t)$, com $t \in]-2\pi, 2\pi[$.
- Calcule o trabalho de h ao longo da elipse definida pelas equações $x^2/3 + y^2/4 = 1$ e $z = 2$, orientada segundo um sentido à sua escolha.

Resolução:

a) Verifica-se facilmente que $\text{rot } h = 0$, ou seja, h é fechado. Vamos escrever $h = a + b + c$ onde $a = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$, $b = \left(\frac{z-1}{x^2 + (z-1)^2}, 0, -\frac{x}{x^2 + (z-1)^2} \right)$ e $c = (0, y^3, 0)$. Temos que a, b, c são fechados. O campo c é obviamente um gradiente, com $c = \nabla(\frac{1}{4}y^4)$.

O campo b , que corresponde a formas-1 do tipo que encontramos na aula e no problema 2) desta ficha, é fechado mas não é gradiente no seu domínio: o integral de linha de b ao longo de uma curva fechada que dê uma vez a volta ao eixo $x = 0, z = 1$, no sentido em que o semi-eixo positivo dos x roda para o semi-eixo positivo dos z , é igual a -2π .

Finalmente, temos $a = \nabla\phi = \nabla(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2 + z^2))$, no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Concluimos que h é a soma de dois gradientes, a e c , com um campo b que não é gradiente, pelo que h não é um gradiente no seu domínio.

b) Temos $\alpha(-2\pi) = (1, -2\pi, 1)$ e $\alpha(2\pi) = (1, 2\pi, 1)$. Estes dois pontos estão à mesma distância da origem e, portanto, pertencem à mesma superfície equipotencial de ϕ . Logo,

$$\int a \, d\alpha = 0 = \phi(1, 2\pi, 1) - \phi(1, -2\pi, 1).$$

Por outro lado,

$$\int c \, d\alpha = \frac{1}{4}y^4 \Big|_{y=-2\pi}^{y=2\pi} = 0.$$

Finalmente, a projecção da espiral no plano xz fornece uma circunferência que rodeia o eixo $x = 0, z = 1$ e que é percorrida *duas vezes* no sentido em que o semi-eixo positivo dos x gira para o semi-eixo positivo dos z . Logo,

$$\int b d\alpha = 2 \times (-2\pi) = -4\pi.$$

(Note que a componente de b segundo os y é nula.)

Assim,

$$\int h d\alpha = 0 + 8\pi^4 - 4\pi.$$

c) A elipse não rodeia o eixo $x = 0, z = 1$, pelo que o trabalho de b ao longo da elipse é nulo. Do mesmo modo, sendo a e c gradientes, o seu trabalho ao longo da elipse é nulo. Logo, também é nulo o trabalho de h ao longo da elipse.

- 9) Seja $\xi = \frac{-z}{(y-1)^2+z^2} dy + \frac{y-1}{(y-1)^2+z^2} dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 1, 0), x \in \mathbb{R}\})$. Seja $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 1, 0), x \in \mathbb{R}\})$ uma forma fechada. Mostre que $\omega = a\xi + d\eta$, com $a \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 1, 0), x \in \mathbb{R}\})$. (Ou seja, qualquer forma-1 fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 1, 0), x \in \mathbb{R}\}$ é dada por uma forma-1 exacta, mais ξ , vezes uma constante.)

Resolução:

Seja L o eixo $y = 1, z = 0$ e seja $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ uma forma fechada qualquer. Seja C uma curva fechada que rodeie uma vez o eixo L , orientada de modo a que $\oint_C \xi = 2\pi$.

Notemos que se uma forma-1 fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus L$ tiver integral nulo ao longo de C então será exacta. Então a forma

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{\oint_C \omega}{2\pi} \xi,$$

será exacta, pois

$$\oint_C \tilde{\omega} = \oint_C \omega - \frac{\oint_C \omega}{2\pi} 2\pi = 0.$$

Logo, existe $\eta \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ tal que $\tilde{\omega} = d\eta$, ou seja

$$\omega = d\eta + \frac{\oint_C \omega}{2\pi} \xi,$$

como queríamos mostrar.

- 10) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 . Mostre que se $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ então $d\phi^*\omega = \phi^*d\omega$.

Resolução:

Como $\phi^*(\eta \wedge \xi) = \phi^*\eta \wedge \phi^*\xi$, e como $d(\eta \wedge \xi) = d\eta \wedge \xi + (-1)^{\text{grau } \eta} \eta \wedge d\xi$, basta mostrar o resultado para formas-1 do tipo

$$\omega = f(x_1, \dots, x_m) dx^i,$$

onde $1 \leq i \leq m$.

Sejam v_1, v_2 campos vectoriais em U , $p \in U$ e tomemos coordenadas x em $\mathbb{R}^m$ e y em $\mathbb{R}^n$. Temos,

$$\begin{aligned} \phi^*d\omega(v_1, v_2)|_p &= \sum_{j=0}^m \frac{\partial f(\phi(p))}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i (D\phi(p) \cdot v_1(p), D\phi(p) \cdot v_2(p)) = \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{\partial f(\phi(p))}{\partial x^j} \det \begin{bmatrix} \nabla \phi_j(p) \cdot v_1(p) & \nabla \phi_j(p) \cdot v_2(p) \\ \nabla \phi_i(p) \cdot v_1(p) & \nabla \phi_i(p) \cdot v_2(p) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial f(\phi(p))}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(p) v_1^k(p) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_l}(p) v_2^l(p) - 1 \leftrightarrow 2 \right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial f(\phi(p))}{\partial y^k}(p) v_1^k \frac{\partial \phi_i}{\partial y_l}(p) v_2^l(p) - 1 \leftrightarrow 2 \right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial f(\phi(p))}{\partial y^k}(p) \frac{\partial \phi_i}{\partial y_l}(p) dy^k \wedge dy^l \right) (v_1, v_2)(p) = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} dy^k \wedge \right\} \left(\sum_{l=1}^n (f \circ \phi) \frac{\partial \phi_i}{\partial y^l} dy^l \right) (v_1, v_2)(p) = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} dy^k \wedge \right\} (\phi^*\omega) (v_1, v_2)(p) = d\phi^*\omega(v_1, v_2)|_p, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.