

Análise Matemática III A - 1º semestre de 2006/07

FICHA DE TRABALHO 4 - RESOLUÇÃO

1) Considere a variedade-1 em $\mathbb{R}^3$,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \sqrt{2}\pi, y = x, z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

- a) Parametrize C .
- b) Escreva uma expressão integral para o comprimento de C .
- c) Sabendo que C tem densidade de carga (por unidade de comprimento) dada por $\alpha(x, y, z) = \sin^2\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}}\right)$, escreva uma expressão integral para a carga total de C .

Resolução:

a) Podemos parametrizar C com $g(x) = (x, x, \sin(\sqrt{2}x))$, $x \in]0, \sqrt{2}\pi[$. A função g é de classe C^1 e injectiva; a sua inversa g^{-1} é contínua e $g'(x) = (1, 1, \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)) \neq 0$, para $x \in]0, \sqrt{2}\pi[$. Logo, g é, de facto, uma parametrização.

b) Temos,

$$L_C = \int_0^{\sqrt{2}\pi} \|g'(x)\| dx = \int_0^{\sqrt{2}\pi} \sqrt{2 + 2\cos^2(\sqrt{2}x)} dx.$$

c) Temos,

$$Q(C) = \int_0^{\sqrt{2}\pi} \alpha(g(x)) \|g'(x)\| dx = \int_0^{\sqrt{2}\pi} \sin^2(x/\sqrt{2}) \sqrt{2 + 2\cos^2(\sqrt{2}x)} dx.$$

2) Considere a variedade-2 em $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \log \sqrt{x^2 + y^2}, 1 < x^2 + y^2 < 4, x < \sqrt{3}y\}.$$

- a) Parametrize S .
- b) Calcule a área de S .

- c) Sabendo que S tem densidade de massa (por unidade de área) dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, calcule o seu momento de inércia relativamente ao eixo dos z .

Resolução:

a) Utilizando as coordenadas (ρ, θ) das coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$, podemos tomar $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \log \rho)$, com $\rho \in]1, 2[$, $\theta \in]\pi/6, 7/6\pi[$. g é injectiva, com inversa contínua, de classe C^1 e a sua derivada (como iremos verificar de seguida) é injectiva, pelo que é uma parametrização de S .

b) Temos,

$$\begin{aligned} V(D_\rho g, D_\theta g) &= \{\det(Dg^t \cdot Dg)\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \det \left(\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1/\rho \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 1/\rho & 0 \end{bmatrix} \right) \right\}^{1/2} = \\ &= \left(\det \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \right)^{1/2} = \sqrt{1 + \rho^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_1^2 \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \sqrt{1 + \rho^2} d\theta d\rho = \pi \int_{\operatorname{arcsinh}(1)}^{\operatorname{arcsinh}(2)} \cosh^2 u \, du = \\ &= (\pi/4) [4 + e^{2u} - e^{-2u}]_{u=\operatorname{arcsinh}(1)}^{u=\operatorname{arcsinh}(2)}, \end{aligned}$$

onde substituímos $\rho = \sinh u$.

c) Em termos da parametrização anterior, temos $\alpha(g(\rho, \theta)) = \sqrt{1 + \rho^2}$. O quadrado da distância ao eixo dos z é dado por ρ^2 . Logo,

$$I_z(S) = \int_1^2 \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \rho^2 \sqrt{1 + \rho^2} \sqrt{1 + \rho^2} d\theta d\rho = \pi \int_1^2 \rho^2 (1 + \rho^2) d\rho = \pi(7/3 - 31/5).$$

3) Seja $A \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto definido por

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w^2 = x^2 + y^2 + z^2, 0 < w < 1\}.$$

- a) Mostre que A é uma variedade. Determine a sua dimensão e parametrize-a.
- b) Calcule o volume-3 de A .

- c) Calcule a coordenada $\bar{w}$ do centro de massa de A , sabendo que a sua densidade de massa é constante.

Resolução:

a) A é o conjunto de nível da função de classe C^1 , $F(x, y, z, w) = w^2 - x^2 - y^2 - z^2$ correspondente ao valor 0. Como $\nabla F(x, y, z, w) \neq 0$ para $(x, y, z, w) \neq 0$ e como $0 \notin A$, A é uma variedade-3 em $\mathbb{R}^4$.

Notemos que, como $0 < w < 1$, se tem $0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1$, pelo que as variáveis (x, y, z) descrevem o interior da bola de raio 1 centrada na origem em $\mathbb{R}^3$, excepto a origem. Vamos então utilizar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) para parametrizar A , com

$$g(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi, r), r \in]0, 1[, \theta \in]0, 2\pi[, \phi \in]0, \pi[.$$

A função g é de classe C^1 , tem inversa contínua e tem derivada injectiva (como se irá verificar abaixo), pelo que define uma parametrização de A , excepto uma sub-variedade-2 correspondente aos pontos sobre o semi-eixo positivo dos x .

b) Temos

$$Dg(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } V(D_r g, D_\theta g, D_\phi g) = \sqrt{\det(Dg^t \cdot Dg)} = \left(\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \right)^{1/2} = \sqrt{2} r^2 \sin \phi.$$

Então,

$$V(A) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \sqrt{2} \frac{4}{3} \pi.$$

c) Como a densidade de massa é constante,

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{V(A)} \int_A w = \frac{1}{V(A)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 w(g(r, \theta, \phi)) \sqrt{2} r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \\ &= \frac{1}{V(A)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} r^3 \sin \phi dr d\theta d\phi = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

4) Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$. Seja $V : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \det \left(\begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_k & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdot & v_k \\ | & & | \end{bmatrix} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Mostre que $V(v_1, \dots, v_k) = 0$ sse os vectores $\{v_j\}_{j=1, \dots, k}$ são linearmente dependentes entre si.

Resolução:

Seja A a matriz simétrica $k \times k$ definida por $[A]_{ij} = v_i \cdot v_j$, $i, j = 1, \dots, k$. Temos $V(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\det A}$.

Suponhamos que os $\{v_j\}_{j=1, \dots, k}$ são linearmente dependentes e que se tem, sem perda de generalidade, $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$, para alguns $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k-1$. (Se necessário reordenem-se os índices; é fácil de verificar que o valor de V não se altera.)

Então, teremos $v_k \cdot v_j = \lambda_1 v_1 \cdot v_j + \lambda_2 v_2 \cdot v_j + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} \cdot v_j$, para $j = 1, \dots, k-1$. Ou seja, a linha k de A é uma combinação linear das $(k-1)$ primeiras linhas de A . Logo, $\det A = 0$ e também $V(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Suponhamos agora que os vectores $\{v_j\}_{j=1, \dots, k}$ são linearmente independentes, gerando o subespaço de dimensão k , W , de $\mathbb{R}^n$. Por ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos encontrar uma base ortonormal de W , $\{b_j\}_{j=1, \dots, k}$, tal que

$$[B] \cdot [S] = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_k \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot [S] = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{bmatrix},$$

onde $B^t \cdot B = I$ e onde a matriz $k \times k$ de mudança de base S é não-singular.

Obtemos então, combinando as fórmulas,

$$V(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \det (S^t \cdot B^t \cdot B \cdot S) \right\}^{1/2} = |\det S| > 0.$$