

Análise Matemática III A - 1º semestre de 2006/07

FICHA DE TRABALHO 1 - RESOLUÇÃO

- 1) Seja $U \subset \mathbb{R}^4$ um aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 .
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto e $h : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $(x, h(x)) \in U, \forall x \in I$. Temos que $1 \in I$, com $h(1) = (2, 3, 4)$, e que

$$DF(1, 2, 3, 4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Sabendo que $F(x, h(x)) = 0$ em I , calcule $Dh(1)$.
b) Calcule a derivada de F segundo o vector $(1, 2, 0, 3)$ no ponto $(1, 2, 3, 4)$.

Resolução

- a) A função $\phi(x) = (x, h(x))$ é diferenciável e temos $F \circ \phi = 0$ em I .
Logo, $D(F \circ \phi)(1) = DF(\phi(1)) \cdot D\phi(1) = D0 = 0$. Logo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ h'_1(1) \\ h'_2(1) \\ h'_3(1) \end{bmatrix} = 0,$$

o que fornece

$$Dh(1) = \begin{bmatrix} h'_1(1) \\ h'_2(1) \\ h'_3(1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Seja $v = (1, 2, 0, 3)$. Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial v}(1, 2, 3, 4) = DF(1, 2, 3, 4) \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- 2) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 . Se $p \in U$ com $\nabla f(p) = 0$, então p diz-se um *ponto crítico* de f .

Mostre que se p é um *extremo* (máximo ou mínimo) local de f então p é ponto crítico de f . (Considere os valores de f sobre uma curva de classe C^1 em U , parametrizada por $\gamma :]-1, 1[\rightarrow U$, com $\gamma(0) = p \in U$.)

Nota: Se p é um ponto crítico de f e não é um extremo local de f , então p diz-se um *ponto em sela* de f .

Resolução

Claramente, se p é extremo local de f então $t = 0$ também é extremo de $f \circ \gamma(t)$. Logo, teremos

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) = 0,$$

onde $\gamma'(0)$, o vector tangente a γ em p , é um vector arbitrário de $\mathbb{R}^n$, pois o argumento é válido para qualquer curva γ que passe em p . Logo, $\nabla f(p) = 0$.

- 3) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Recorde que a matriz $n \times n$ das segundas derivadas de f , $H_f(x)$, com $[H_f(x)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, se designa por *matriz Hessiana* de f .

Determine a matriz Hessiana, $H_f(x, y)$, de $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Resolução

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 10 + 12x & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{bmatrix}.$$

- 4) Considere (parte) do *teorema de Taylor* de 2^a ordem:

Se f é um campo escalar de classe C^2 definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e se $a \in U$, então, para $\|h\|$ suficientemente pequena,

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^t \cdot H_f(a) \cdot h + R_2(a + h),$$

onde $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|R_2(a+h)\|}{\|h\|^2} = 0$.

Nota: O termo $h^t \cdot H_f(a) \cdot h$ designa o produto da matriz linha h^t com a matriz quadrada $H_f(a)$ e com a matriz coluna h .

Seja agora a um ponto crítico de f . Mostre que:

- a) Se $H_f(a)$ é definida positiva (resp. negativa) então a é um mínimo (resp. máximo) local.
- b) Se $H_f(a)$ é indefinida então a é um ponto em sela.
- c) Se a é um mínimo (resp. máximo) local então $H_f(a)$ é semi-definida positiva (resp. negativa).

Resolução

Sendo a um ponto crítico, temos

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} h^t \cdot H_f(a) \cdot h + R_2(a+h).$$

Como $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|R_2(a+h)\|}{\|h\|^2} = 0$, se $H_f(p)$ for definida positiva (resp. negativa), então, para $\|h\|$ suficientemente pequena, o sinal do lado esquerdo será positivo (resp. negativo) e obtemos a). Analogamente, se $H_f(p)$ for indefinida então p será um ponto em sela pois o lado esquerdo toma valores positivos e negativos, obtendo-se b). Por outro lado, se a é um máximo (resp. mínimo) local então o lado direito não pode tomar valores negativos (resp. positivos) para $\|h\|$ suficientemente pequena e obtemos c).

- 5) Considere de novo o campo escalar $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. Determine e classifique os pontos críticos de f . (Ou seja, diga se são máximos, mínimos ou pontos em sela.)

Resolução

Temos $\nabla f = (6x^2 + 10x + y^2, 2y + 2xy)$. A equação vectorial $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ tem então 4 soluções: $a = (0, 0)$, $b = (-5/3, 0)$, $c = (-1, 2)$, $d = (-1, -2)$. Estudemos cada um destes pontos críticos.

Temos,

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que é definida positiva; logo a é um mínimo local.

Temos,

$$H_f(b) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix},$$

que é definida negativa, pelo que b é um máximo local.

Temos,

$$H_f(c) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

que é indefinida (basta ver que $\det H_f(c) < 0$, pelo que os dois valores próprios de $H_f(c)$ têm sinais opostos).

Finalmente, temos

$$H_f(d) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix},$$

que também é indefinida, sendo d um ponto em sela.

6) Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$: Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- a) Determine se g é injectiva. Em caso contrário, determine domínios máximos de injectividade de g .
- b) Em que pontos é que o T.F. Inversa garante a existência de uma inversa local de classe C^∞ para g ?
- c) Mostre que g é injectiva no conjunto

$$A = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r \in]0, +\infty[, \theta \in]0, 2\pi[\},$$

e que g^{-1} é de classe C^∞ em $g(A)$. Determine a expressão para g^{-1} .

- d) Qual é a imagem por g do rectângulo $[0, R] \times [0, 2\pi]$?

Resolução

a) Claramente g não é injectiva. Notemos que $\|g(r, \theta)\| = r$. Logo, dois pontos só podem ter a mesma imagem se tiverem a mesma coordenada r . No entanto, $g(r, \theta) = g(r, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Notemos também que $g(r, \theta) = g(-r, \theta + \pi)$. Os domínios máximos de injectividade são da forma $\{r > 0, \theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[\}$ ou $\{r < 0, \theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[\}$. (Sendo rigorosos devemos ainda juntar um ponto $(0, \beta)$ a estes domínios; notemos que $g(r, \beta) = (0, 0)$ qualquer que seja β .)

b) Temos,

$$\det Dg(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r.$$

Logo, todos pontos com $r \neq 0$ têm uma vizinhança onde g tem inversa local de classe C^∞ .

- c) Que g é injectiva em A vem da resposta da alínea a). Logo, g tem uma inversa globalmente definida em $g(A)$ e como $r > 0$ em A , e usando o resultado da alínea b), o TF Inversa garante que g^{-1} é de classe C^∞ . Seja $(x, y) = g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Temos $r^2 = x^2 + y^2$ e como $r > 0$ em A vem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por outro lado, $y/x = \tan \theta$. Assim para $x, y > 0$ temos $\theta = \arctan(y/x)$. Para $x, y < 0$ temos $\theta = \pi + \arctan(y/x)$, etc. Note que o contradomínio de $\arctan$ é $]-\pi/2, \pi/2[$.
- d) No plano r é uma coordenada radial e θ representa o ângulo com o eixo dos x . A imagem do rectângulo $[0, R] \times [0, 2\pi]$ é o disco fechado de raio R centrado na origem.
- 7) As concentrações de cinco químicos, X, Y, Z, W, V , numa mistura altamente explosiva são dadas pelas variáveis x, y, z, w, v . O valor 0 destas variáveis corresponde ao valor de equilíbrio, muito instável, da mistura. Estas variáveis estão sujeitas às equações seguintes:

$$\begin{cases} x &= \cos w - \cos v \\ y &= e^w + e^v - 2 \\ z &= \cos w - e^v. \end{cases}$$

- a) Será suficiente conhecer (w, v) para determinar completamente a mistura ? E se fôr (x, v) ?
- b) Na vizinhança do ponto de equilíbrio, é suficiente conhecer (y, z) para determinar a mistura ? Em caso afirmativo, calcule $\frac{\partial x}{\partial y}$ no ponto de equilíbrio.
- c) Se aumentarmos ligeiramente a concentração de Y , a concentração de W aumenta ou diminui ?
- d) Sabe-se que a componente estabilizadora da mistura é V , pelo que baixando um pouco o valor de v a partir do valor de equilíbrio a mistura explode. Se pretendermos construir um explosivo com um mecanismo de detonação que consiste na libertação de uma pequena quantidade de Y ou Z na mistura, qual dos dois componentes devemos escolher ?

Resolução

- a) As equações definem x, y, z como funções de w, v pelo que o conhecimento de (w, v) determina a mistura. Por outro lado, o valor de x e de v não determina, por exemplo, unicamente o valor de w , pelo que neste caso a resposta é negativa.

b)c)d) Seja $F(x, y, z, w, v) = (x - \cos w + \cos v, y - e^w - e^v + 2, z - \cos w + e^v)$. Temos, no ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0, 0)$,

$$DF(0, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A submatriz correspondente às colunas de x, w, v ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é não-singular e o teorema da função implícita garante que todas as soluções na vizinhança de $(0, 0, 0, 0, 0)$ são da forma $(x(y, z), y, z, w(y, z), v(y, z))$ com $F(x(y, z), y, z, w(y, z), v(y, z)) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x(y, z), y, z, w(y, z), v(y, z))}{\partial(y, z)}(0, 0) &= DF(0, 0, 0, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema linear obtemos,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} (0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\frac{\partial x}{\partial y}(0, 0) = 0$. Temos, $\frac{\partial w}{\partial y}(0, 0) = 1$, pelo que se aumentarmos ligeiramente o valor de y então w aumenta. Temos $\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial z}(0, 0) = -1$, pelo que se aumentarmos ligeiramente a concentração de Z , v vai diminuir e detonaremos a explosão.