

Análise Matemática III A - 1º semestre de 2006/07

FICHA DE TRABALHO 4

(entregar na aula prática da semana de 6/11/2006)

- 1) Considere a variedade-1 em $\mathbb{R}^3$,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \sqrt{2}\pi, y = x, z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

- a) Parametrize C .
- b) Escreva uma expressão integral para o comprimento de C .
- c) Sabendo que C tem densidade de carga (por unidade de comprimento) dada por $\alpha(x, y, z) = \sin^2\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}}\right)$, escreva uma expressão integral para a carga total de C .

- 2) Considere a variedade-2 em $\mathbb{R}^3$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \log \sqrt{x^2 + y^2}, 1 < x^2 + y^2 < 4, x < \sqrt{3}y\}.$$

- a) Parametrize S .
- b) Calcule a área de S .
- c) Sabendo que S tem densidade de massa (por unidade de área) dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, calcule o seu momento de inércia relativamente ao eixo dos z .

- 3) Seja $A \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto definido por

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w^2 = x^2 + y^2 + z^2, 0 < w < 1\}.$$

- a) Mostre que A é uma variedade. Determine a sua dimensão e parametrize-a.
- b) Calcule o volume-3 de A .
- c) Calcule a coordenada $\bar{w}$ do centro de massa de A , sabendo que a sua densidade de massa é constante.

4) Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$. Seja $V : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \det \left(\begin{bmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_k & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdot & \cdot & v_k \\ | & & | \end{bmatrix} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Mostre que $V(v_1, \dots, v_k) = 0$ sse os vectores $\{v_j\}_{j=1, \dots, k}$ são linearmente dependentes entre si.